# Application de la dérivation

Maths Spécialité Première

MATHÉMATIQUES

NOTRE DAME DU VOEU

LYCÉE

# Plan d'action résumé

1°) Montrer que la fonction $f$ est dérivable puis calculer sa fonction dérivée $f'$.

2°) Étudier le signe de la fonction dérivée $f'$.

Cela signifie: Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$

- Très souvent cela s'obtient en résolvant l'équation $f'(x) = 0$ puis

en construisant le tableau de signe de la fonction $f'$.

- Se rapporter à l'étude du signe du fonction affine et d'une fonction polynôme du second degré.

3°) En déduire le tableau de variation de la fonction $f$ et les éventuels extremums.

# Exemple 1:  la fonction cube

1°) La fonction cube est une fonction de référence définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée est $f'(x) = 3x^2$.

2°) Étudie du signe de la fonction dérivée $f'$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{f'(x) = 0}$$
$$3x^2 = 0$$
$$x^2 = 0$$
$$\boldsymbol{x = 0}$$

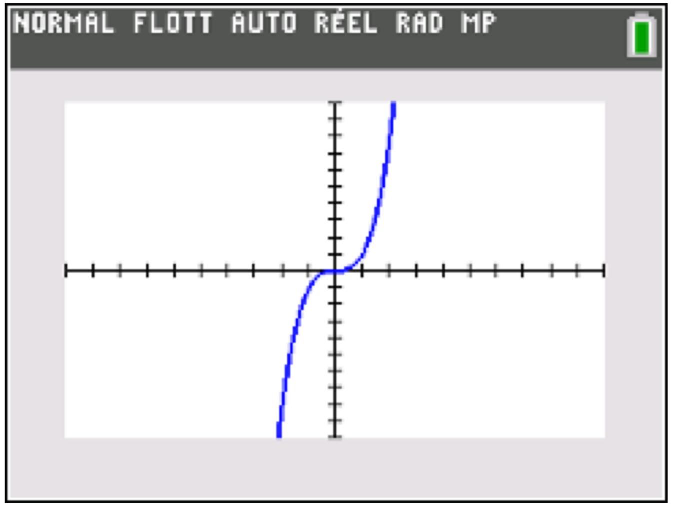
$x^2$ est positif sur $\mathbb{R}$ donc $3x^2$ est positif. Par conséquent, la fonction **$f'$ est positive sur $\mathbb{R}$.**

| x | $-\propto$ | | 0 | | $+\propto$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | + | |

3°) En déduire le tableau de variation de la fonction $f$ et les éventuels extremums.

| x | −∝ | | 0 | | +∝ |
|---|---|---|---|---|---|
| f’(x) | | + | 0 | + | |
| f(x) | | | ↗ | | |

Pas d’extremum.



# Exemple 2: $\boldsymbol{f(x) = 4x^2 - 16}$

1°) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4\times 2x - 0$$
$$f'(x) = 8x$$

2°) Étude du signe de la fonction dérivée $f'$.

$\boldsymbol{f'(x) = 0}$ si et seulement si $\boldsymbol{x = 0}$.

Étude du signe de $f'$ (On peut aussi avoir une approche basée sur les fonctions affines)

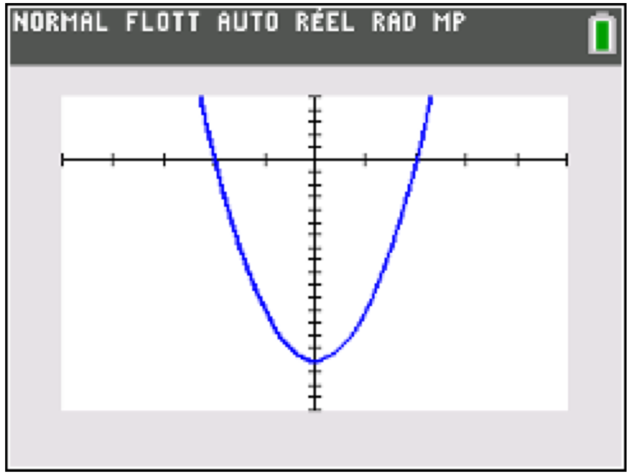
| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$ | $\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$ |
| $\boldsymbol{8x \geq 0}$ | $\boldsymbol{8x \leq 0}$ |
| $\boldsymbol{x \geq 0}$ | $\boldsymbol{x \leq 0}$ |

| x | $-\propto$ | 0 | $+\propto$ |
|---|---|---|---|
| f’(x) | - | 0 | + |

3°) En déduire le tableau de variation de la fonction $f$ et les éventuels extremums.

| x | $-\propto$ | 0 | $+\propto$ |
|---|---|---|---|
| f’(x) | - | 0 | + |
| f(x) | | -16 | |

$$\boxed{f(\mathbf{0}) = 4\times\mathbf{0}^2 - 16 = -16}$$



# Exemple 3: La fonction $f(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2$

1°) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{4}\times 4x^3 + \frac{5}{3}\times 3x^2 - \frac{6}{2}\times 2x$$
$$f'(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$$

2°) Étude du signe de la fonction dérivée $f'$.

$f'(0) = 0$ donc 0 est une racine de la fonction polynôme $f'$.

Factorisation de $f'$ : (étape 1). $f'(x) = x(-x^2 + 5x - 6)$

(étape 2). $-x^2 + 5x - 6 = 0$

$$\Delta = 1$$
$$\Delta > 0 \ donc\ l'équation\ admet\ deux\ solutions$$
$$x_1 = 2\ et\ x_2 = \ 3$$

(étape 3). $f'(x) = -x(x-2)(x-3)$

On résout l'équation $\boldsymbol{f'(x) = 0}$

$$-x(x-2)(x-3) = 0$$

On en déduit: $\boldsymbol{S = \{0; 2; 3\}}$

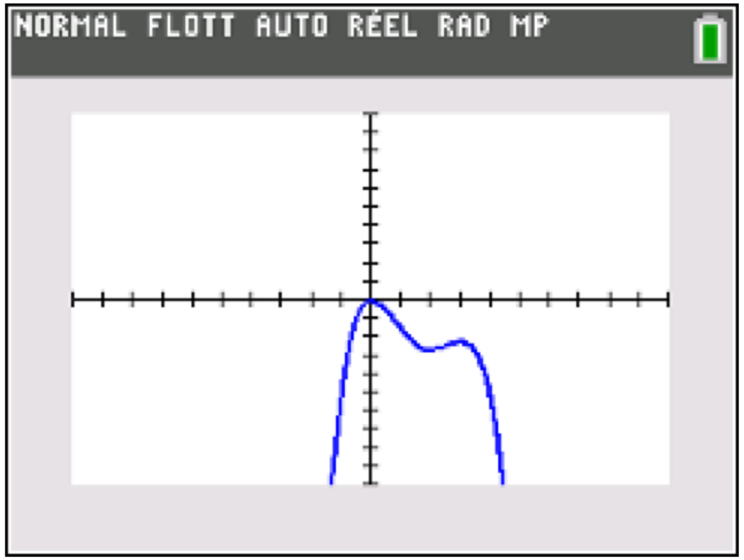
| x | $-\propto$ | | $\mathbf{0}$ | | $\mathbf{2}$ | | $\mathbf{3}$ | | $+\propto$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -x | | **+** | **0** | | | **-** | | | |
| x-2 | | | | **-** | **0** | | | **+** | |
| x-3 | | | | **-** | | | **0** | **+** | |
| f'(x) | | **+** | **0** | **-** | **0** | **+** | **0** | **-** | |

3°) En déduire le tableau de variation de la fonction $f$ et les éventuels extremums.

| x | $-\propto$ | | 0 | | 2 | | 3 | | $+\propto$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | |
| f(x) | | ↗ | 0 | ↘ | $-\frac{8}{3}$ | ↗ | $-\frac{9}{4}$ | ↘ | |

Trois extremums en 0, en 2 et en 3.

Le maximum en 0.



# Exemple 4: La fonction $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12}$

1°) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2\times 3x^2 - 4\times 2x - 10\times 1 + 0$$
$$f'(x) = 6x^2 - 8x - 10$$

2°) Étude du signe de la fonction dérivée $f'$.

On résout l'équation
$$f'(x) = 0$$
$$6x^2 - 8x - 10 = 0$$
$$\Delta = 304$$
$$\Delta > 0 \; donc \; l'équation \; admet \; deux \; solutions$$
$$x_1 = \frac{8-\sqrt{304}}{2\times 6} = \frac{2+\sqrt{19}}{3} \; et \; x_2 = \frac{2-\sqrt{19}}{3}$$

Factorisation: $f'(x) = 6(x - \frac{2+\sqrt{19}}{3})(x - \frac{2-\sqrt{19}}{3})$

| x | $-\propto$ | | $x_2$ | | $x_1$ | | $+\propto$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-x_1$ | | | - | | 0 | + | |
| $x-x_2$ | | - | 0 | | + | | |
| 6 | | | | + | | | |
| f’(x) | | + | 0 | - | 0 | + | |

3°) En déduire le tableau de variation de la fonction $f$ et les éventuels extremums.

| x | $-\propto$ | | $x_2$ | | $x_1$ | | $+\propto$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f’(x) | | + | 0 | - | 0 | + | |
| f(x) | | ↗ | $\frac{112+76\sqrt{19}}{27}$ | ↘ | $\frac{112-76\sqrt{19}}{27}$ | ↗ | |