Correction exercice 3 p 107

Pour cet exercice il convient de déterminer dans un premier temps la forme de la fonction f pour utiliser la formule adéquate c'est-à-dire si f est la somme , le produit ou le quotient de deux fonctions.

1. $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$

   f est dérivable sur I comme **produit** de deux fonctions dérivables l'une u(x) = x – 1 sur IR et l'autre v(x) =$\sqrt{x}$ sur] 0 ; +∞[

   $u(x) = x - 1 \qquad u'(x) = 1$
   $v(x) = \sqrt{x} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   $donc\ \ f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$ = $1 \times \sqrt{x} + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$=$\sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$

   $$on\ peut\ simplifier\ \ f'(x) = \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

2. $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x - 1)$

   f est le produit de deux fonctions $u(x) = x^2 - 1\ \ et\ v(x) = \ x^3 + 2x - 1$ dérivables

   sur IR donc f est dérivable sur IR

   Avec $u(x) = 2x$ et $v'(x) = \ 3 \times x^2 + 2 \times 1 = 3x^2 + 2$

   et $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = (2x) \times (\, x^3 + 2x - 1) + (x^2 - 1)(3x^2 + 2)$
   (on développe)
   = $2x^4 + 4x^2 - 2x + 3x^4 + 2x^2 - 3x^2 - 2$
   = $5x^4 + 3x^2 - 2x - 2$

3. $f(x) = \frac{1}{2x^2-8}$ f est de la forme $f = \frac{1}{u}$ elle est donc dérivable sur son ensemble

   de définition , il faut donc chercher les valeurs interdites c'est-à-dire les valeurs qui

   annulent u(x)= $2x^2 - 8$

   On détermine pour cela le discriminant Δ= $0^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 64 > 0$

   Il y a donc deux racines $x_1 = \frac{-0-\sqrt{64}}{2\times 2} = -2$ et $x_2 = \frac{-0+\sqrt{64}}{2\times 2} = 2$

   f est donc dérivable sur IR/{ - 2 ; 2} donc sur] -2 ; 2[

   On a $u'(x) = 2 \times 2x = 4x$ et $f'(x) = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{4x}{(2x^2-8)^2}$

4. $f(x) = \frac{x^3-1}{5} = \frac{x^3}{5} - \frac{1}{5}$, f est donc dérivable sur IR et n'est pas à considérer comme une fonction rationnelle

   Et $f'(x) = \frac{1}{5} \times 3x^2 - 0 = \frac{3x^2}{5}$

5. $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+5}$ est une fonction rationnelle du type $f = \frac{u}{v}$

Elle est donc dérivable sur son ensemble de définition or $v(x) = x^2 + 5 \geq 5 \neq 0$

Donc f est définie et dérivable sur IR

D'autre part $u(x) = 2x - 5$ d'où $u'(x) = 2$

Et $v(x) = x^2 + 5$ d'où $v'(x) = 2x$

On a donc $f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v\prime(x)}{v(x)^2} = \frac{2\times(x^2+5)-(2x-5)\times 2x}{(x^2+5)^2}$

$$= \frac{2x^2+10-4x^2+10x}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+10x+10}{(x^2+5)^2}$$

6. $f(x) = \sqrt{8-2x}$
f est de la forme $f(x) = g(ax+b)$ $\;avec\; g(x) = \sqrt{x}$

f est donc dérivable pour $ax + b > 0$ donc ici pour $8 - 2x > 0$ $\;soit\;$ $8 > 2x$

$donc\ pour$ $4 > x$, donc f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,4[$

Et $f'(x) = a \times g'(ax+b) = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{8-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{8-2x}}$