

Thème : Analyse

Chapitre : la fonction exponentielle

Objectifs : . 1. Etudier et utiliser la fonction exponentielle

2. Etudier une composée affine de la fonction exponentielle

3. Modéliser une situation par une croissance ou décroissance exponentielle

Objectif 1 : Etudier et utiliser la fonction exponentielle

1. Définition et propriété

a. Définition

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur IR de dérivée f' égale à f

telle que
$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée : $x \rightarrow \exp(x)$

Démonstration : On admet qu'il existe une fonction f telle que
$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On va montrer que cette fonction est unique en utilisant un

Ce raisonnement consiste à supposer qu'il existe une deuxième fonction g qui possède les mêmes propriétés que f

C'est-à-dire
$$\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$$
 et montrer que c'est impossible ou « absurde »

Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ h est dérivable comme quotient de fonction dérivable

Et
$$h'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g^2(x)} = \dots = 0$$
 puisque

Donc h est une fonction constante et $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$ donc pour tout x

Donc finalementet donc on a démontré qu'une seule fonction f vérifie
$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

b. Propriétés algébriques

Théorème : Pour tout réel x et y on a $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Exemple : $\exp(2 + 3) = \exp(5) = \exp(2) \times \exp(3)$

Démonstration : soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

$$g'(x) = \dots = \frac{\exp(x+y) \times \exp(x) - \exp(x+y) \times \exp(x)}{\exp^2(x)} = 0$$

Car pour tout x $\exp'(x) = \exp(x)$

Donc $g(x)$ est constante donc $g(x) = g(0) = \exp(y)$ et donc $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$

Soit $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Propriété : pour tous réels x et y **1. $\exp(x) \times \exp(-x) \dots$**

2. $\exp(x - y) \dots$

Démonstration : 1. on considère la fonction g définie par $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$

On a alors $g'(x) = \dots$

Donc $g(x)$ est une fonction constante donc $g(x) = g(0) = 1$

On a démontré que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$

2. $\exp(x - y) = \dots$

Or on a démontré que $\exp(y) \times \exp(-y) = 1$ donc $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}$

Et donc $\exp(x - y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)}$

c. Notation e^x

. e est l'image de 1 par la fonction exponentielle $\exp(x)$

. $e \approx 2,718$

. Par extension on notera $\exp(x) = e^x$

Conséquence : avec la nouvelle notation on a les propriétés algébriques

e^{x+y} e^{x-y} $e^x \times e^{-x}$ e^{-x}

Exemples : simplifier $A = (e^{-1}) \times (e^2)^3 = \dots\dots\dots$

$$B = \frac{(e^2)^3 \times e^{-1}}{e^2} \dots\dots\dots$$

2. Etude de la fonction exponentielle $x \rightarrow e^x$

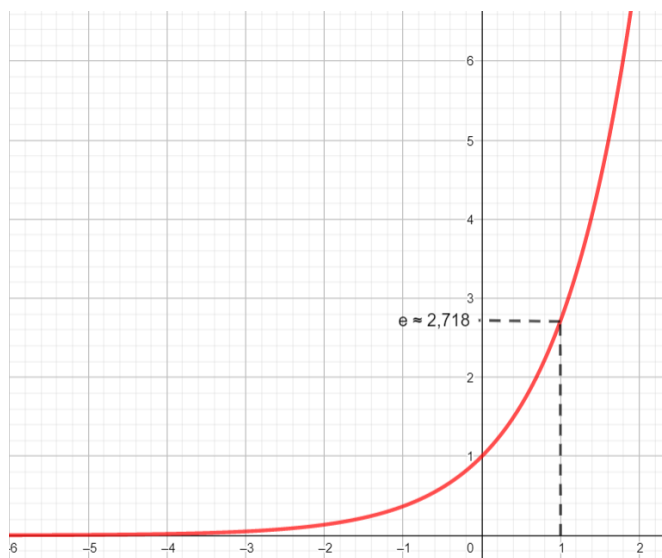
Propriété : pour tout x , $e^x > 0$

Démonstration : $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2$ or un carré est toujours positif donc $e^x > 0$

Propriété : . La fonction exponentielle est dérivable et $(e^x)' = e^x$
. La fonction exponentielle est

Démonstration : $(e^x)' = e^x$ par définition et donc comme $e^x > 0$ la fonction exponentielle est donc strictement croissante

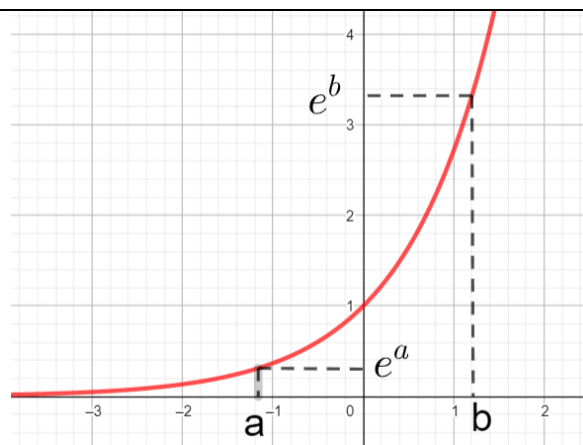
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x				



Conséquence de la croissante stricte de la fonction exponentielle

$$. e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$. e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$



Application : résoudre

$$e^{\frac{x}{2}+1} = e^2$$

$$e^{x^2-1} < 1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....