Thème : Analyse

Chapitre : la fonction exponentielle

Objectifs : . *1. Etudier et utiliser la fonction exponentielle*

2. Etudier une composée affine de la fonction exponentielle

3. Modéliser une situation par une croissance ou décroissance exponentielle

Objectif 1 : Etudier et utiliser la fonction exponentielle

1. Définition et propriété

a.Définition

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur IR de dérivée f ‘ égale à f

telle que $\begin{cases} \mathbf{f' = f} \\ \mathbf{f(0) = 1} \end{cases}$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée : x $\longrightarrow$ exp(x)

Démonstration : On admet qu’il existe une fonction f telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On va montrer que cette fonction est unique en utilisant un raisonnement *par l’absurde*

Ce raisonnement consiste à supposer qu’il existe une deuxième fonction g qui possède les mêmes propriétés que f

C’est-à-dire $\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$ et montrer que c’est impossible ou « absurde »

Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ h est dérivable comme quotient de fonction dérivable

Et $h'(x) = \frac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f(x)\times g(x) - f(x)\times g(x)}{g^2(x)} = 0$ puisque $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$

Donc h est une fonction constante et $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$ donc h(x)= 1 pour tout x

Donc finalement $\frac{f(x)}{g(x)}$ = 1 soit f(x) = g(x) et donc on a démontré qu’une seule fonction f vérifie $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

b. Propriétés algébriques

Théorème : Pour tout réel x et y on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Exemple : $\exp(2+3) = \exp(5) = \exp\,(2) \times \exp\,(3)$

Démonstration : soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \frac{\exp\,(x+y)}{\exp\,(x)}$

$$g'(x) = \frac{exp'(x+y) \times \exp(x) - \exp\,(x+y) \times exp'(x)}{exp^2(x)} = \frac{exp(x+y) \times \exp(x) - \exp\,(x+y) \times exp(x)}{exp^2(x)} = 0$$

Car pour tout x $\quad exp'(x) = \exp(x)$

Donc g(x) est constante donc $g(x) = g(0) = \exp\,(y)$ et donc $\frac{\exp\,(x+y)}{\exp\,(x)} = \exp\,(y)$

Soit $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$

Propriété : pour tous réels x et y

1. $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$

2. $\exp\,(x-y) = \frac{\exp\,(x)}{\exp\,(y)}$

Démonstration : 1. on considère la fonction g définie par $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$

On a alors $g'(x) = \exp(x) \times (-\exp(-x)) + \exp(x) \times \exp(-x) = 0$

Donc g(x) est une fonction constante donc g(x) = g(0) = 1

On a démontré que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$

2. $\exp(x-y) = \exp\big(x + (-y)\big) = \exp(x)\exp\,(-y)$

Or on a démontré que $\exp(y) \times \exp(-y) = 1$ donc $\exp(-y) = \frac{1}{\exp\,(y)}$

Et donc $\exp(x-y) = \exp\,(x) \times \frac{1}{\exp\,(y)}$

c. Notation e^x

. e est l'image de 1 par la fonction exponentielle exp(x)

. $e \approx 2,718$

. Par extension on notera $\quad \exp(x) = e^x$

Conséquence : avec la nouvelle notation on a les propriétés algébriques

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^x \times e^{-x} = 1 \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Exemples : simplifier A = $(e^{-1}) \times (e^2)^3 = e^{-1} \times e^6 = e^5$

B = $\frac{(e^2)^3 \times e^{-1}}{e^2} = \frac{e^6 \times e^{-1}}{e^2} = \frac{e^5}{e^2} = e^3$

2. Etude de la fonction exponentielle $x \to e^x$

Propriété : pour tout x , $e^x > 0$

Démonstration : $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ or un carré est toujours positif donc $e^x > 0$

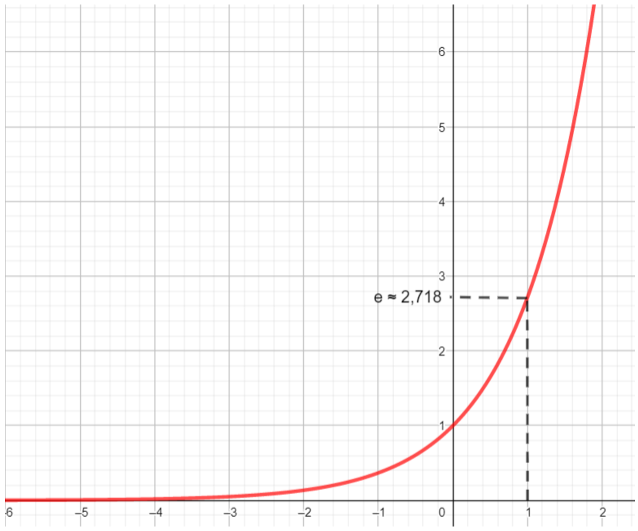
Propriété : . La fonction exponentielle est dérivable et $(e^x)' = e^x$

. La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR

Démonstration : $(e^x)' = e^x$ par définition et donc comme $e^x > 0$ la fonction exponentielle

est donc strictement croissante

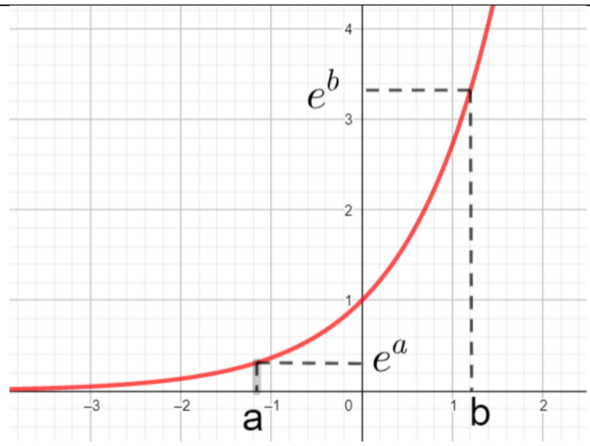
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	↗	1	e	↗



Conséquence de la croissante stricte de la fonction exponentielle

. $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

. $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$



Application : résoudre

$e^{\frac{x}{2}+1} = e^2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + 1 = 2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1$

$\Leftrightarrow x = 2$

$e^{x^2-1} < 1$

$\Leftrightarrow e^{x^2-1} < e^0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$

$\Leftrightarrow x^2 < 1$ soit $x \in]-1\,;1[$