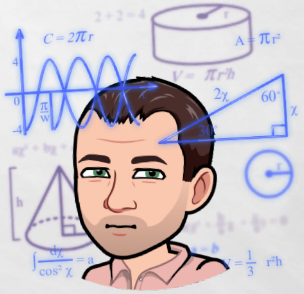
THÈME: FONCTIONS

NOTRE DAME DU VOEU
LYCÉE

Séquence 16:
Se constituer un répertoire de fonctions de référence

Je dois connaître	• Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives. • Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.
Je dois Savoir-faire	• Pour les fonctions carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$. • Relier représentation graphique et tableau de variations. • Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle. • Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
Démonstrations à connaître	• Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x > 0$. • Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.



1

MEVEL CHRISTOPHE

1°) La fonction carré

Définition :
La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x associe son carré x^2, est appelée fonction carré.

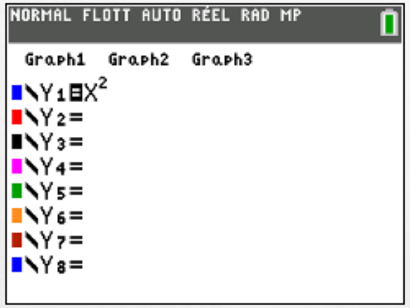
a) Sens de variation

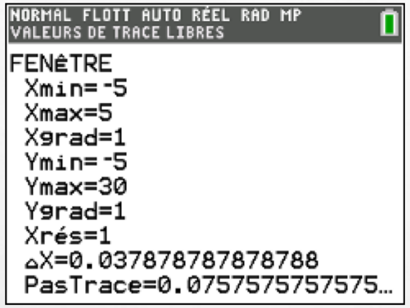
Propriété : La fonction racine carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

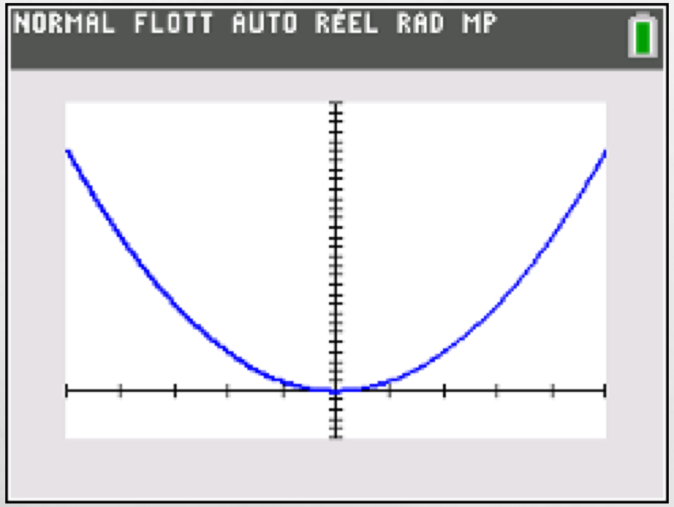
Démonstration :
Pour démontrer que $f : x \mapsto x^2$ est croissante sur l'intervalle $I = [0;+\infty[$, il suffit de prouver que si u et v sont deux nombres de I tels que $0 \leq u < v$, alors $f(u) < f(v)$. La décroissance de manière analogue.
Autrement dit, si $u - v < 0$, alors $f(u) - f(v) < 0$ ou encore $u^2 - v^2 < 0$.
u et v étant positifs par hypothèse : $u^2 - v^2 = = (u + v)(u - v)$
$u + v > 0$ car $u > 0$ et $v > 0$.
Comme $u - v < 0$, on peut affirmer que $u^2 - v^2 < 0$

En conclusion, si $u - v < 0$ alors $u^2 - v^2 < 0$: la fonction carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

b) Représentation graphique avec la calculatrice







Un tableau de valeurs sur [-5 ; 5].

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5
f(x)	25	9	4	1	0	1	4	9	25

Le tableau de variation sur] -∞ ; +∞ [.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Définition: Dans repère orthogonal d'origine O, la représentation graphique de la fonction carré est appelée parabole.

Propriété: Dans un repère orthogonal, la parabole représentant la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2°) La fonction inverse

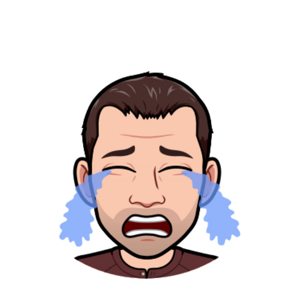
Définition : La fonction définie sur] -∞ ; 0 [U] 0 ; + ∞ [(noté aussi ℝ*), qui à tout réel x différent de 0 associe son inverse $\frac{1}{x}$ est appelée fonction inverse.

a) Sens de variation

Propriété : La fonction inverse est strictement décroissante sur] -∞ ; 0 [U] 0;+∞ [.

Démonstration :

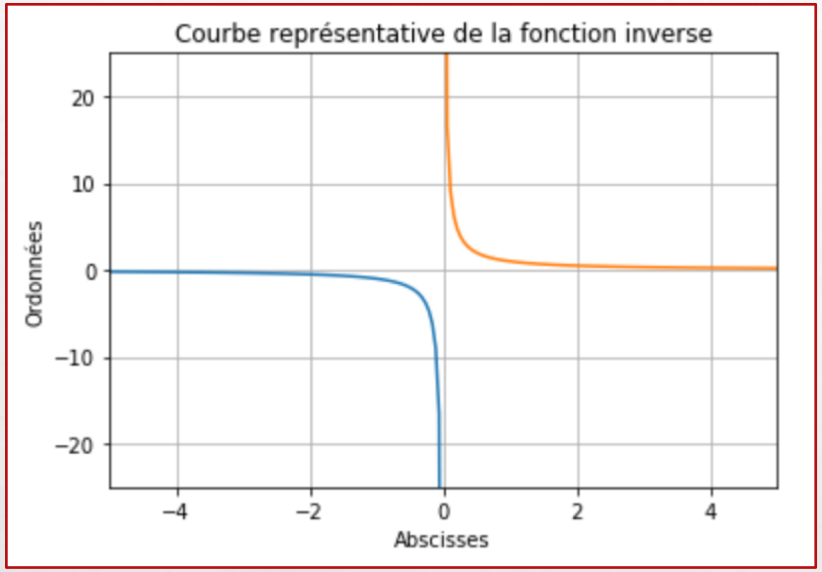
Pour démontrer que $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle I =] 0 ; +∞[, il suffit de prouver que si u et v sont deux nombres de I tels que $0 < u < v$, alors $f(u) > f(v)$. La démonstration sur l'intervalle] -∞ ; 0 [se fait de manière analogue.
Autrement dit, si $u - v < 0$, alors $f(u) - f(v) > 0$ ou encore $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} > 0$.



u et v étant strictement positifs : $u \times v > 0$.
Par hypothèse, $u - v < 0$ donc $v - u > 0$.
Par conséquent, $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v-u}{u \times v} > 0$.

On en déduit que $f(u) - f(v) > 0$.
En conclusion, si $u - v < 0$, alors $f(u) - f(v) > 0$: la fonction inverse est strictement décroissante sur] 0 ; +∞ [.

b) Représentation graphique avec Python



Source : jaicompris.com

Un document Jupyter pour tester le langage Python.

https://github.com/cmevel/Fontions_de_reference/blob/master/La%20fonction%20inverse.ipynb

Adresse à insérer dans https://nbviewer.jupyter.org

Un tableau de valeurs sur [-4 ; 0 [U] 0 ; 4].

x	-4	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	4
f(x)					Non définie				

Le tableau de variation sur] -∞ ; 0 [U] 0 ; +∞ [.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$		‖	$+\infty$ $\searrow$ 0	

Remarque : La courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère.

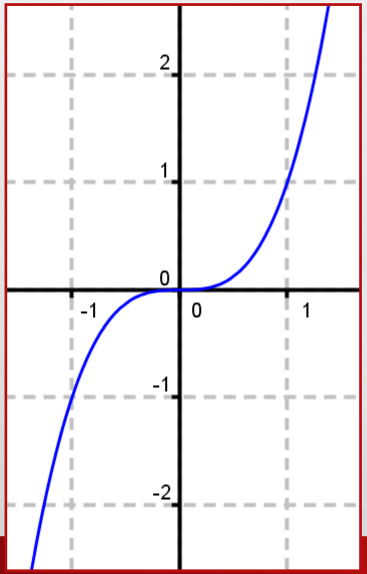
3°) La fonction cube

Définition : La fonction f telle que f : $x \mapsto x^3$ est appelée fonction cube.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

a) Sens de variation

Propriété admise : La fonction cube est strictement croissante sur $]-\infty\ ;+\infty[$.

b) Représentation graphique

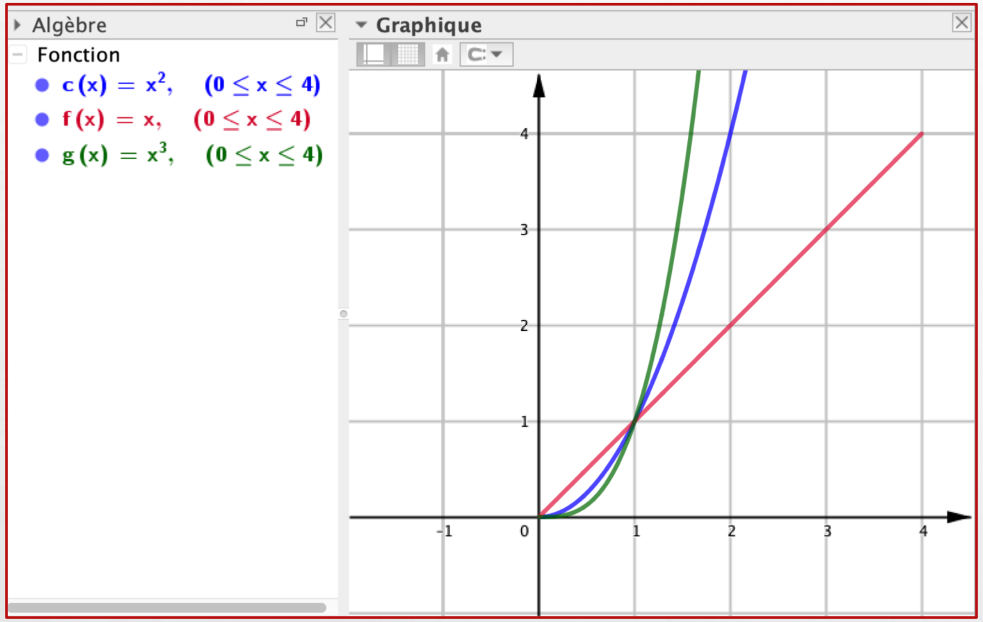


Le tableau de variation sur $]-\infty\ ;+\infty[$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : La courbe représentative de la fonction cube passe par l'origine du repère et est symétrique par rapport à celui-ci

4°) Étude de la position relative des courbes d'équation $y = x, y = x^2$ et $y = x^3$ pour $x \geq 0$



À l'aide de l'application géogébra, on peut conjecturer que:

- Si $0 \leq x < 1$, alors la courbe d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ qui est elle-même au-dessus de la courbe d'équation $y = x^3$.
- Si $x > 1$, alors la courbe d'équation $y = x$ est en-dessous de la courbe d'équation $y = x^2$ qui est elle-même en-dessous de la courbe d'équation $y = x^3$.

Cela s'interprète mathématiquement ainsi:

- Si $0 \leq x < 1$, alors $x^3 \leq x^2 \leq x$.
- Si $x > 1$, alors $x \leq x^2 \leq x^3$.

Démonstration à connaître :

https://youtu.be/_QK6ga3qIv8

Source : monclasseurdemaths.fr

5°) La fonction racine carrée

Définition : La fonction définie sur [0;+∞[, qui à tout nombre réel positif x associe sa racine carrée notée $\sqrt{x}$, est appelée fonction racine carrée.

a) Sens de variation

Propriété : La fonction racine carrée est croissante sur [0;+∞[.

Démonstration :

Pour démontrer que $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur l'intervalle $I = [0;+\infty[$, il suffit de prouver que si u et v sont deux nombres de I tels que $0 \leq u < v$, alors $f(u) < f(v)$.

Autrement dit, si $u - v < 0$, alors $f(u) - f(v) < 0$ ou encore $\sqrt{u} - \sqrt{v} < 0$.

u et v étant positifs : $u - v = (\sqrt{u})^2 - (\sqrt{v})^2 = (\sqrt{u} + \sqrt{v})(\sqrt{u} - \sqrt{v})$

Par hypothèse, $u - v < 0$.

De plus, comme une racine carrée est une quantité positive ou nulle, $\sqrt{u} + \sqrt{v} > 0$.

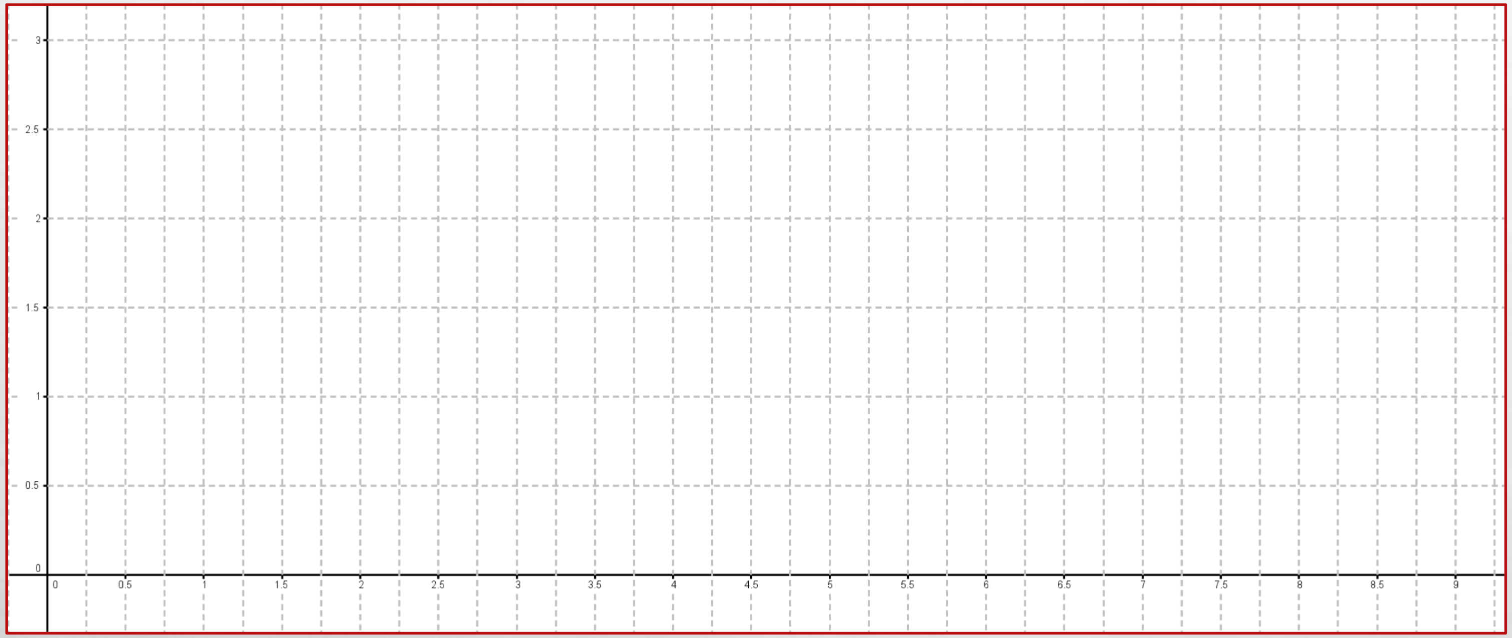
D'après la règle des signes, on en déduit que $\sqrt{u} - \sqrt{v} < 0$.

En conclusion, si $u - v < 0$ alors $\sqrt{u} - \sqrt{v} < 0$: la fonction racine carrée est croissante sur [0;+∞[.

b) Représentation graphique

Un tableau de valeurs permet de tracer la courbe sur [0 ; 9].

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$\sqrt{x}$	**0**	**½**	**1**	**2**	**3**



Le tableau de variation sur [0 ; +∞[.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$