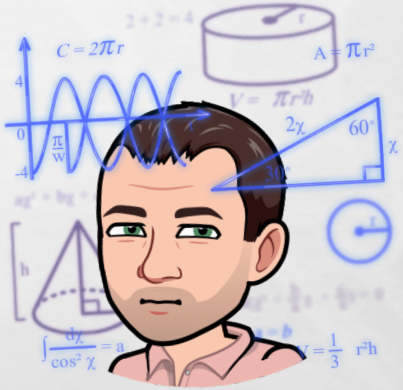
THÈME: GÉOMÉTRIE

SÉQUENCE 2 : LA GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

Compétences travaillées	Capacités observables associées
Chercher (Ch)	• Extraire les informations pertinentes dans un énoncé. • Emettre une conjecture.
Représenter (Re)	• Repérer un point du plan donné, placer un point connaissant ses coordonnées.
Modéliser (Mo)	• Traduire un problème par une équation se ramenant à une équation du premier degré.
Calculer (Cal)	• Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées. • Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
Raisonner (Rai)	• Mettre en place une démarche explicative justifiant votre résultat en s'appuyant sur la géométrie plane vue au collège concernant la nature des quadrilatères, les théorèmes de Pythagore et Thalès…
Communiquer (Co)	• Enoncer, avec un vocabulaire adapté et une notation pertinente : ✓ Les coordonnées d'un point du plan ; ✓ La solution d'une équation ; ✓ Les explications justifiant la nature d'un quadrilatère.



MEVEL CHRISTOPHE

1°) Repère et coordonnées

Définition:
On appelle repère orthonormé du plan, un plan défini par trois points (O; I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet O.

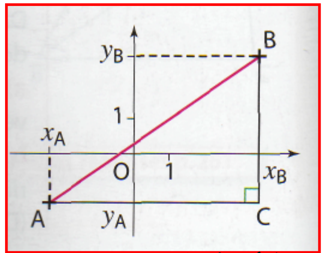
Propriété (Admise) :
Dans un repère orthonormé, tout point M du plan est repéré par un unique couple (x_M ; y_M) de réels, appelés coordonnées de M.
x_M est appelé l'abscisse de M et y est appelé l'ordonnée de M où x_M est le point d'intersection entre l'axe des abscisses et la droite perpendiculaire à cet axe passant par M et y_M est le point d'intersection entre l'axe des ordonnées et la droite perpendiculaire à cet axe passant par M.

Remarque: cette propriété reste vraie pour un repère quelconque.

2°) Distance entre deux points du plan

Propriété:
Soit un repère orthonormé contenant deux points:
- A de coordonnées (x_A ; y_A)
- B de coordonnées (x_B ; y_B).

La distance entre les points A et B est donnée par: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



Source : Hyperbole éd 2010

Démonstration :

On suppose que les points A et B sont placés comme sur la figure slide 2. Les autres cas se démontrent de manière analogue.

D'après la figure, on a $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$.

On introduit un point C tel $y_B = y_A$ et $x_A = x_B$.

Dans le triangle ABC, rectangle en C (à démontrer à la maison), l'application du théorème de Pythagore nous donne:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Ce qui signifie que

$$AB^2 = (x_C - x_A)^2 + (x_C - x_B)^2$$

Autrement dit,

$$AB = \sqrt{(x_c - x_A)^2 + (x_C - x_B)^2}$$ car AB est positive.

Exemple d'application:

Dans un repère orthonormé, on donne les points A (-2 ; 1), B (2 ; -1), C (1 ; -3).

Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

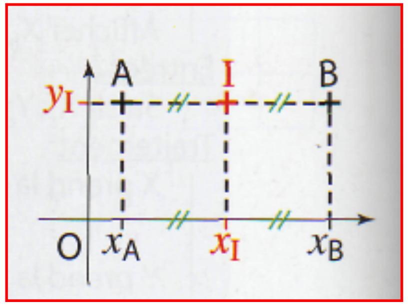
L'utilisation de la formule pour calculer les distances AB, BC et AC permettra par la suite de valider l'égalité du Théorème de Pythagore.

3°) Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété:
Soit un repère orthonormé contenant deux points,
- **A de coordonnées (x_A ; y_B) et**
- **B de coordonnées (x_B ; y_B).**

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées (x_I ; y_I) avec:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

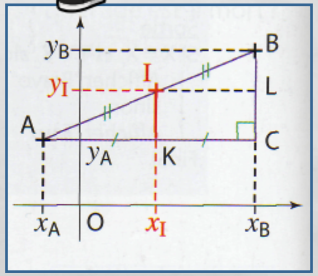


Source : Hyperbole éd 2010

Démonstration par disjonction des cas:

- **1^{er} cas: $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$.**
  On suppose que $y_A = y_B$ et que $x_A < x_B$.
  Les autres sous cas se démontrent de manière analogue.

  I est le milieu de [AB] si et seulement si I ϵ [AB] et AI = IB, ce qui signifie que $x_A - x_I = x_B - x_I$.
  D'où $2x_I = x_A + x_B$
  On arrive rapidement au résultat espéré qui est $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$. De même, $y_I = y_A = y_B = \frac{y_A + y_B}{2}$.
- **$2^{ème}$ cas: $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$.**
  On note C le point tel que $x_C = x_B$ *et* $y_C = y_A$. (cf figure)
  Le triangle ABC est rectangle en C. (à démontrer avec le théorème de Pythagore)
  On note K le milieu de [AC].



Source : Hyperbole éd 2010

D'après le 1er cas, on peut dire que: $x_K = \frac{x_A + x_C}{2}$.

D'après le théorème des milieux appliqué au triangle ABC avec I et K les milieux respectifs des segments [AB] et [AC], on peut conclure que la droite (IB) est parallèle à la droite (BC).
Ce qui signifie que: $x_I = x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$.

Procéder de la même manière avec le milieu L de [BC] pour démontrer que $y_I = y_L = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{y_B + y_A}{2}$.

....

....

....

....

....

Exemple d'application:
Soit les points A (2 ; -7) et B (4 ; -3) dans un repère orthonormé.
Utilisation immédiate de la formule donnant les coordonnées du milieu d'un segment [AB].