THÈME : STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

NOTRE DAME DU VOEU
LYCÉE

SÉQUENCE 9: VARIABLES ALÉATOIRES

MEVEL CHRISTOPHE

1°) Probabilité d'événement (Rappels)

- On appelle Ω l'ensemble de tous les résultats possibles issus d'une expérience aléatoire.

Un événement A est une partie de ces résultats.

- Dans le cas où tous les résultats de Ω ont la même probabilité d'être réalisés, la probabilité de A est
- la fréquence de A dans Ω:

$$P(A) = \frac{nombre\ d'éléments\ de\ A}{nombre\ total\ d'éléments\ de\ \Omega}$$

- La probabilité d'un événement est toujours un nombre entre 0 et 1.
- Si A et B sont deux événements d'un même ensemble Ω: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$, est formé de tous les résultats qui ne sont pas dans A: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple: On lance un dé cubique non pipé contenant six faces numérotées de 1 à 6.

1°) Donner l'ensemble des possibilités $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

2°) On note A l'événement obtenir 5 au lancé. Donner la probabilité de l'événement A. $P(A) = \frac{1}{6}$

3°) Soit B l'événement : Obtenir un chiffre pair. Quelles sont les possibilités? $B = \{2 ; 4 ; 6\}$.Quelle est la probabilité? $P(B) = \frac{3}{6}$

4°) Quelle est la probabilité d'obtenir AUB?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - 0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

5°) Quelle est la probabilité de $\bar{A}$?

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

2°) Variable aléatoire

a) Variable aléatoire discrète

Définition:
Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire: on a défini une loi de probabilité sur cet univers.
On définit une variable aléatoire sur l'univers Ω lorsque l'on associe un nombre réel à chaque issue.

Exemple:

Soit un jeu consistant à effectuer deux tirages successifs d'une boule numérotée de 1 à 5 avec remise.
Les boules sont indiscernables au touché. Le joueur gagne 15 € si la somme des chiffres est 2 ou 10,
ne gagne rien si la somme est 6, perd 2 € si la somme est 3 ou 9 perd 1 € dans tous les autres cas.
Soit X la variable aléatoire définit comme le gain en euros obtenu par le joueur.
Les valeurs prises par X traduisent le gain de 15 €, l'absence de gain et la perte de 1€, noté $X = \{15\,;0\,;-1\,;-2\}$

- **On note {X = k} l'événement « le nombre de succès est égal à k ».**

Exemple: {X = 15} dans le jeu précédent correspond à l'événement « le gain obtenu est égal à 15 € ».

- **On note P(X=k) la probabilité de cet événement, c'est-à-dire obtenir EXACTEMENT k succès.**

  Attention au nombre de chemins à prendre en considération !

Exemple: P(X = 15) = $\frac{2}{25}$.

- **On note P(X < k)** la probabilité de cet événement, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir **moins de k succès.**
- **P(X ≤ k)** la probabilité de cet événement, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir **au plus k succès.**
- **P(X > k)** la probabilité de cet événement, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir **plus de k succès.**
- **P(X ≥ k)** la probabilité de cet événement, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir **au moins k succès.**

Exemple: P(X < 0) est la probabilité d'obtenir moins de 0 €.

P(X < 0) = P(X = -2) + P(X = -1)

$= \frac{4}{25} + \frac{14}{25}$

$= \frac{18}{25}$

b) Loi de probabilité

Définition:
Si $x_1, \ldots, x_n$ désignent les valeurs prises par X, on note $X = x_i$ les issues pour lesquelles X prend la valeur x_i.
On note $P(X = x_i)$ la probabilité de cet événement.
La loi de probabilité de X représente l'ensemble des probabilités relatifs aux valeurs x_i sous forme de tableau.

Exemple:

x_i	-2	-1	0	15
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$

+ =1

c) Espérance

Définition:
L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre $E(X)$:

$$\boldsymbol{E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}$$

Remarques :

- L'espérance est la moyenne pondéré des valeurs prises X.
- On dit que le jeu est rentable si $E(X) > 0$
- On interprète la valeur de $E(X)$ comme une somme qu'on peut espérer gagner (ou perdre) si on y joue un très grand nombre de fois.

Exemple:

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times \frac{4}{25} + (-1) \times \frac{14}{25} + 0 \times \frac{5}{25} + 15 \times \frac{2}{25} \\ &= -\frac{22}{25} + \frac{30}{25} \\ &= \frac{8}{25} \end{aligned}$$

On peut conclure que le jeu est rentable et que si l'on y joue un très grand nombre de fois, on peut espérer gagner 0,32 €.

3°) Expériences aléatoires à deux épreuves indépendantes

Définition:
Des expériences aléatoires à deux épreuves indépendantes sont des expériences à deux niveaux avec chacune plusieurs issues et dont le résultat obtenu par le deuxième niveau ne dépend pas du résultat obtenu au premier niveau.

Exemples:

- Soit l'expérience aléatoire consistant à prélever une boule dans une urne A en contenant 5 (chaque boule étant numérotée de 1 à 5) puis à prélever une boule dans une urne B contenant 3 boules rouges et 1 boule noire.
  Le tirage obtenu dans la deuxième urne est indépendant du résultat obtenu après le tirage dans la première urne.
  On peut aussi bien avoir une boule rouge ou noire quelque soit le numéro indiqué sur la boule extraite dans l'urne A.
  On effectue ici une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.

- Soit l'expérience aléatoire consistant à prélever une boule dans une urne A en contenant 5 (chaque boule étant numéroté de 1 à 5) puis si le numéro est pair à prélever une boule dans une urne B contenant 3 boules rouges et 1 boule noire, et sinon à prélever une boule dans une urne C contenant 7 boules rouges et 3 boules noires.
  Le résultat du deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage, donc on effectue ici
  une expérience aléatoire à deux épreuves non indépendantes.