

THÈME: STATISTIQUES ET PROBABILITÉS



NOTRE
DAME
DU VOEU

SÉQUENCE 11: LES PROBABILITÉS

CAPACITÉS :

- DÉTERMINER LA PROBABILITÉ D'ÉVÉNEMENTS DANS DES SITUATIONS D'ÉQUIPROBABILITÉ.
- UTILISER DES MODÈLES DÉFINIS À PARTIR DE FRÉQUENCES OBSERVÉES.
- ÉVÉNEMENT ET SON CONTRAIRE.
- INTERSECTION ET RÉUNION D'ÉVÉNEMENTS; ÉVÉNEMENTS INCOMPATIBLES.

MEVEL CHRISTOPHE



1



1°) Préliminaire historique

Loi des grands nombres:

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une même expérience aléatoire de manière indépendante, la fréquence des issues a tendance à se stabiliser autour d'une valeur p .

On prend cette valeur p comme probabilité de l'issue.

Illustration: La probabilité d'obtenir « pile » au lancé d'une pièce est 0,5 et pourtant si l'on joue 10 fois de suite, on n'a peu de chance d'obtenir 5 piles et 5 faces.

Il faudrait environ 600 lancers pour être proche de cette probabilité...

Jacques Bernoulli (1654-1705):

D'une famille de mathématiciens suisses, Jacques Bernoulli est le premier à donner une vision de « la loi des grands nombres ». C'est cette vision de la probabilité qui permettra son application aux questions de la vie quotidienne.

2°) Vocabulaire et représentations

a) Vocabulaire et propriétés

Mise en situation illustrant le cours
On lance un dé à six faces bien équilibré.

Définition: Dans une expérience aléatoire, l'univers est l'ensemble de toutes les issues possibles. On le note Ω ou E .

Exemple: dans notre situation, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Définitions:

- Un événement est une partie de l'univers noté par une lettre majuscule comme A .
- Ω est l'événement certain et \emptyset est l'événement impossible.
- Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'une seule issue de l'univers.
- L'événement contraire de A , noté \bar{A} , est l'ensemble des issues de l'univers qui ne sont pas dans A .

Exemples: $A = \ll \text{Obtenir un nombre pair} \gg$, $B = \ll \text{Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2} \gg$, $C = \ll \text{Obtenir 5} \gg$.
 $\bar{A} =$, $\bar{B} =$, $\bar{C} =$

Définitions:

- La probabilité d'un événement est donnée par $\frac{\text{le nombre d'issues favorables}}{\text{le nombre d'issues totale}}$ et se note $P(A)$ pour la probabilité de l'événement A .
- L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exemples: $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$; $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{6}$; $P(\bar{A}) = \frac{3}{6} = 0,5$; $P(\bar{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $P(\bar{C}) = \frac{5}{6}$

Propriétés:

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- Pour tout événement A , $0 \leq P(A) \leq 1$
- Pour tout événement A , $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Autrement dit, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Exemple: $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) Représentations et loi de probabilité

Tableau à double entrées illustrant le cas où on lance deux dés:

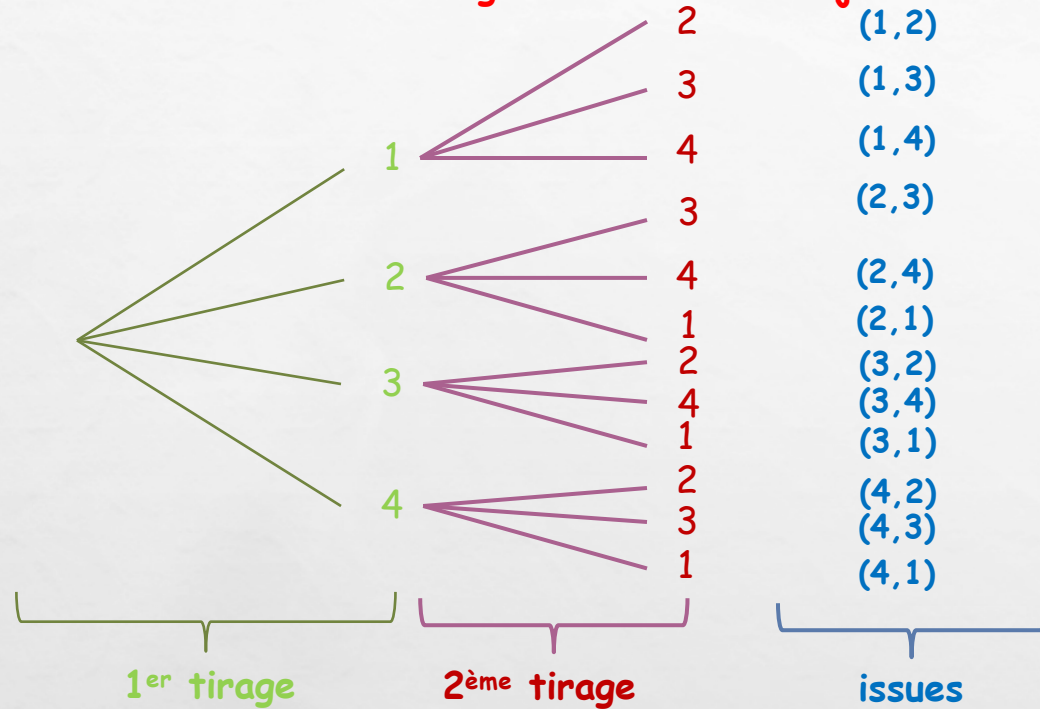
N° des Dés	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Loi de probabilité associée à la somme des numéros des dés

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Définition:
une loi de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard.

Un arbre illustrant deux tirages successifs d'un jeton numéroté de 1 à 4 dans une urne contenant 4 jetons sans remise:



Loi de probabilité associée à la somme des jetons

Somme	3	4	5	6	7
Probabilité	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

3°) Calculs de probabilités

Définition:

On dit que deux événements sont incompatibles s'il n'existe pas d'éléments commun entre les deux événements.
Autrement dit, $A \cap B = \emptyset$

Exemple:

Les deux événements : « Obtenir un chiffre pair » et « Obtenir 5 » dans le lancer d'un dé cubique à six faces sont incompatibles.

Définition:

Si A et B sont deux événements incompatibles, on a alors: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriété:

Pour tout événements A et B on a : $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
Autrement dit, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple:

Soit un lancer de dé cubique non truqué à six faces. Soit A l'événement « Obtenir un chiffre pair » et B l'événement « Obtenir 2 ».

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{6}; P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$