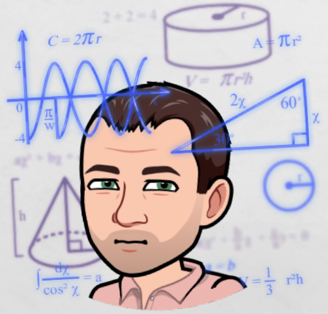
THÈME: ALGÈBRE

SÉQUENCE 1:
ÉQUATIONS, FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ 1

Je dois connaître	**Fonction polynôme du Second degré donnée sous forme factorisée. Racines, discriminant, factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré.**
Je dois Savoir-faire	• Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts. • Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, identité remarquable, application des formules générales. • Choisir une forme adaptée (développée réduite, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations)
Je dois savoir reproduire	• **Démonstration de la résolution de l'équation second degré**

1



MEVEL CHRISTOPHE

NOTRE DAME DU VOEU
LYCÉE

BY NC SA

1°) Fonction polynôme du second degré (trinôme)

a) Définitions

Dire qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction trinôme ou polynôme du second degré signifie ……………………………………
…………………………………………………………………..: $\boldsymbol{f(x) =}$ … … … … … … … … . .. **(Forme ……………………..)**

Il s'agit de la forme développée de f(x).

Remarque : Un polynôme de degré 2 s'écrit sous forme développée de manière unique.

Exemples : f(x) = 3x² +2x -7 (a = …, b = … et c = …); g(x) = -5x² + 3 (a = …, b = … et c = …); h(x) = 4x -9x² (a = …, b = .. et c = …)

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$.
………...

Exemple: Soit la fonction f, polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 2$
En calculant l'image de 1 par la fonction f, c'est-à-dire $f(1)$, on trouve …….
Cela se traduit en langage mathématique par: … … … … … … … … … … . ..
Autrement dit, ……………………………………………………………………………...

cc BY NC SA

On appelle ……………………….., toute racine d'une fonction polynôme du seconde degré qui se détermine aisément.

Exemple: 1 dans l'exemple précédent est dit racine évidente de la fonction polynôme du second degré f.

Remarque: En règle générale, les racines évidentes sont soit déterminées en testant les nombres entiers compris entre -5 et 5 soit déterminées à l'aide d'un calcul préalable demandé dans l'exercice.

b) Factorisation d'une fonction polynôme du second degré

Propriété: Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
……:
$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ..$

Exemple: Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 8x - 7$.
On en déduit que : a = …, b = … et c = ….
Calculons $f(\dots)$: $f(\dots) = \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$
On peut donc dire que ………………………………………………..
Par conséquent, f est ………………………………………………..

BY NC SA

Procédure à suivre pour factoriser une fonction polynôme de degré 2 à l'aide d'une racine évidente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 16x + 28$

1°) Recherche d'une racine évidente de f

Racine évidente

$f(0) = \ \dots ; f(1) = \ \dots ; f(2) = \dots .$

Valeur a

Donc … est une ……………………….. de la fonction polynôme du second degré f.

2°) Factorisation de f par l'expression par $x - 2$

La fonction polynôme f peut être mise sous la forme $(x \ - \ \dots)(\dots x + d)$

3°) On développe l'expression précédente

$(x \ - 2)(1x + d) = \ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots .$

$= \ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ..$

4°) On identifie terme à terme les deux expressions de f

$x^2 - 16x + 28 = \ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

On en déduit que : $\begin{cases} \dots \dots \dots \dots .. \\ \dots \dots \dots \dots .. \end{cases}$

5°) On détermine la valeur de d

$d = \ \dots \dots \dots ..$

6°) Conclure

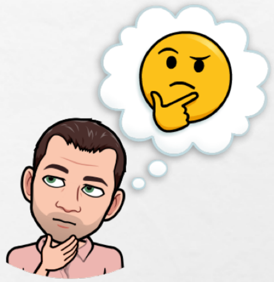
La factorisation de la fonction f est:

$f(x) = \ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ..$

BY NC SA

Conséquences:

- Si la fonction polynôme du second degré *f* admet deux racines x_1 et x_2 alors cette fonction est factorisable par l'expression $(x - x_1)(x - x_2)$.
- Une fonction polynôme du second degré admet au plus deux racines.



Propriété: Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

……:

$f(x) =$ … … … … … … … … … … … … (**Forme ………………………..)**

c) Déterminer les fonctions polynômes s'annulant en deux nombres réels distincts

- La connaissance de deux racines d'une fonction polynôme du second degré vous permet d'écrire partiellement la forme factorisée de cette fonction. Votre réponse sera alors tributaire d'une variable, le coefficient *a non nul.*

Exemple: Les fonctions polynômes f tel que $f(3) = 0 \; et \; f(9) = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $f(x) =$ … … … … … … … … … … …

$où \; a \; est \; un \; nombre \; réel.$

- La connaissance de deux racines d'une fonction polynôme du second degré ainsi qu'un élément supplémentaire vous permet d'écrire l'unique solution possible.

Exemple: La fonction polynôme f tel que $f(3) = 0, f(9) = 0 \; et \; f(0) = 5$ sera de la forme $f(x) = a(x - 3)(x - 9)$.

En exploitant l'information … … … … … … … … …, on détermine ……………………………………..

… …

… … … … … … … … … … … … … . .

$a =$ … … …

Par conséquent, la fonction f respectant ses conditions est : $f(x) =$ … … … … … … … … … … … … .

BY NC SA

2°) Résolution des équations du second degré

a) Discriminant d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont réels et $a \neq 0$.
La mise en situation nous a permis de mettre en évidence l'importance du nombre donné par $b^2 - 4ac$.
On appelle .... de f, et on note ...., le nombre donné par la formule ....

Exemples:

1. Soit $f(x) = 2x^2 - 9x - 5$
   On a ici **a =** …, **b = …** et **c = ….**
   D'où Δ = **b²** - 4 **a** **c**
   = (…)² - 4 × … × (…)
   = ….

2. Soit $h(x) = 3x^2 + x + 1$
   On a ici **a =** …, **b = …** et **c = …** .
   D'où Δ = **b²** - 4 **a** **c**
   = (**…**)² - 4 × … × **…**
   = ….

Entraînement:

b) Equation du second degré

On appelle équation du second degré toutes les équations qui peuvent être mises sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels et a non nul.

Théorème: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont réels et $a \neq 0$.

- **Si ………., alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes:**

  $$x_1 = \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. \text{ et } x_2 = \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

- **Si ……….., alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution unique:**

  $$x_0 = \ \ldots \ldots ..$$

- **Si ………, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ …………..**
  ……………………………………………………………..

Résolution des équations du second degré

Recherche des valeurs de a, b et c.

Calcul du Discriminant
Δ = ………………

Si …….. alors	**Si …….. alors**	**Si …….. alors**
Deux solutions: $x_1 = \ \ldots \ldots \ldots$ …**et** $x_2 = \ \ldots \ldots \ldots$.	$x_0 = \ \ldots \ldots$	………… ……………. ………..

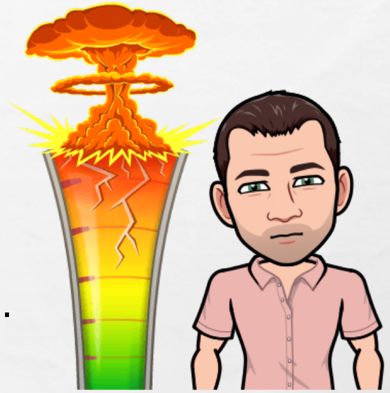
BY NC SA

Démonstration: Pour tout x $\in \mathbb{R}$, f$(x) = ax^2 + bx + c$ équivaut à f$(x) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … . .

équivaut à f$(x) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … …

équivaut à f$(x) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … .

équivaut à f$(x) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … … . .



Rappel: $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$

Ainsi pour tout x $\in \mathbb{R}$, f$(x) = a\,(x-\alpha)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = a\,(x - \ldots)^2 - \frac{\ldots\ldots}{4a}$.

Résoudre l'équation f$(x) = 0$ revient à résoudre l'équation $a\,(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$. Trois cas se présentent alors :

Δ < 0

$a\,(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$ *équivaut à*

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Δ = 0

$a\,(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$ *équivaut à*

… … … … … … … … … *équivaut à*

… … … … … … .

L'équation f(x) = 0 ……………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Δ > 0

$a\,(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$ *équivaut à*

… … … … … … … … … … *équivaut à*

…………………………………ou … … …

L'équation f(x) = 0 ……………………………………………

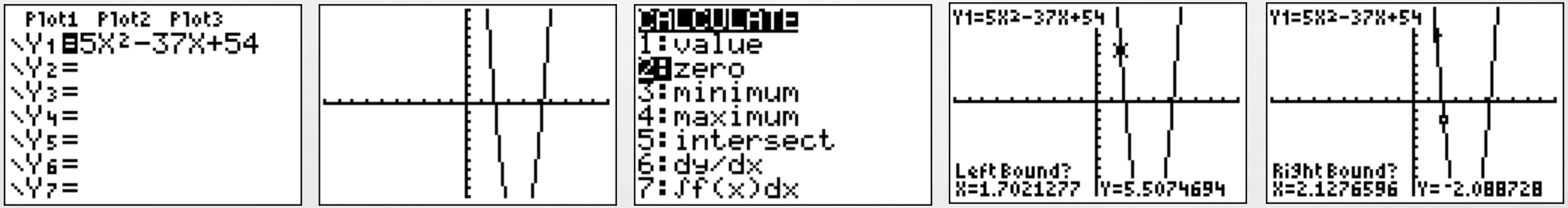
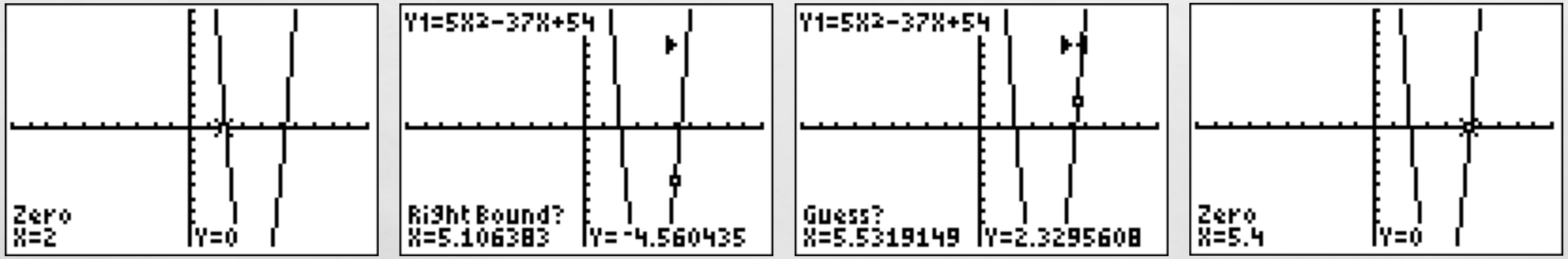
$x_1 =$ … … … … … … … … et $x_2 =$ … … … … … … . .

cc BY NC SA

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x^2 - 37x + 54 = 0$.

Interprétation graphique:

A l'aide de la calculatrice, conjecturons le nombre et les solutions de cette équations.

On conjecture .... solutions qui sont ... et ....

BY NC ND

Résolution algébrique:

$5x^2 - 37x + 54 = 0$

1°) Calcul de Δ

Δ = ……………………………………………

2°) Détermination du signe de Δ

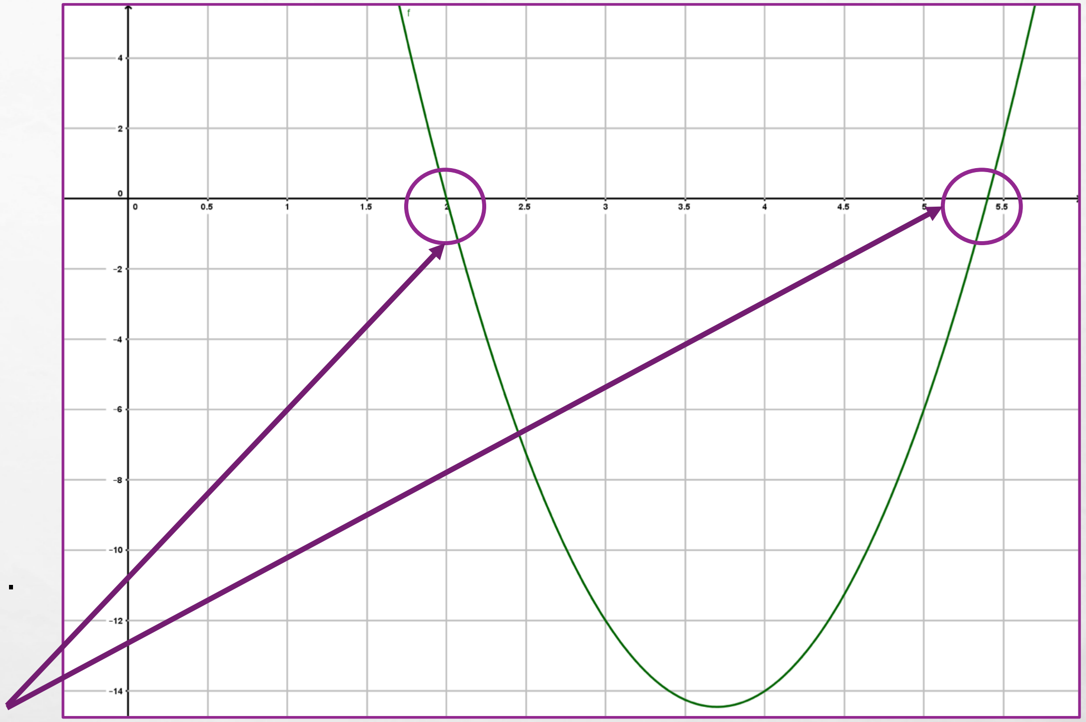
………………………………………………

3°) Utilisation des formules adéquates

$x_1 =$ ……..………………… $et\ x_2 =$ ..……………………….

4°) Vérification sur le graphique

Abscisses des points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses.



Remarque:

Résoudre une équation du second degré revient à chercher les antécédents de 0 par la fonction f, polynôme du second degré.

Autrement dit résoudre f(x) = 0 où f est un polynôme du second degré revient à résoudre une équation du second degré.

BY NC ND

3°) Applications

a) Factorisation d'une fonction polynôme du second degré

Propriété (admise):
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$.
- **Si ….**
- **Si … ..**
- **Si … . .**

Exemple: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x + 6$.

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= … … … … … … … .$
$= … … … . .$

$\Delta > 0$, donc la fonction admet deux racines réelles.

$x_1 =$ … … … … … … … … … … … . . $et\ x_2 =$ … … … … … … … … … … … … …

Vérification:
$f(-2) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … .
$f(3) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … …
La forme factorisée de la fonction polynôme f est: … . .

cc BY NC SA