Trigonométrie Partie 1

Capacité travaillée:

Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer le cosinus et sinus d'angles associées

Contenu:

- **Radian;**
- **Cercle trigonométrique;**
- **Mesure d'un angle orienté;**
- **Mesure principale.**

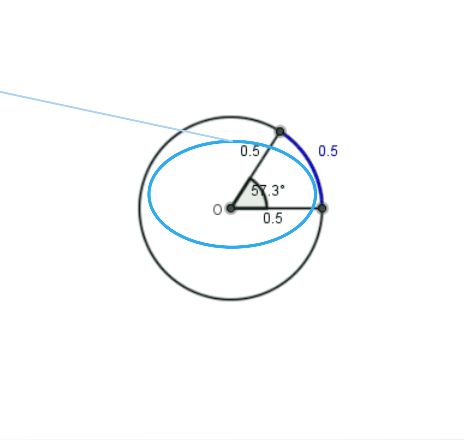
Mevel Christophe

A] Radian et cercle trigonométrique

1°) Le radian

Définition:
On appelle radian noté rad, la mesure d'un angle qui intercepte un arc dont la longueur est égale à son rayon.

1 radian



Propriétés:

- La longueur l d'un arc de cercle intercepté par un angle α, exprimé en radians, est donnée par : ....
- La mesure en radians d'un angle plein (tour complet) est de 2π radians.

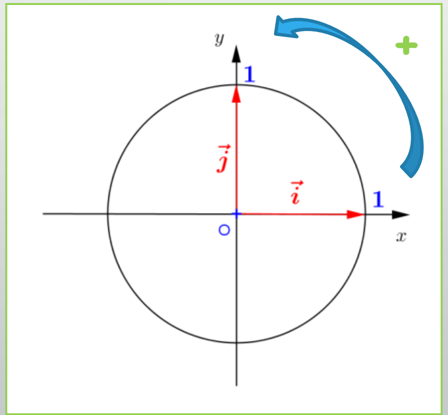
Démonstrations à faire.

2°) Le cercle trigonométrique

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé ………………………………… (ou positif) .
L'autre sens est appelé ……………………………………………… (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi sens trigonométrique).

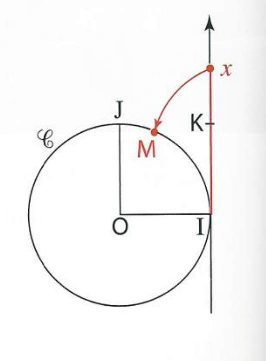
Définition:
Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\vec{j}\ )$ et orienté,
Le cercle trigonométrique est ……………………………………………………………………………….



Mevel Christophe

3°) Enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique

On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et (O; I, J) un repère orthonormé direct. K est le point de coordonnées (1;1) et on munit la droite (IK) du repère (I; K).
On enroule droite (IK) sur le cercle $\mathcal{C}$, ainsi tout nombre réel x
Vient s'appliquer sur un point M de $\mathcal{C}$:
M est le point image du nombre réel x.



Propriétés (admises):

- **Si x et x' sont des nombres réels tels que x-x' = k2π où k est une entier relatif alors x et x' ………………………………………………………………………… …….**
- **Si M est le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, image d'un nombre réel x, alors ……………………………………………………………………………………. ……**

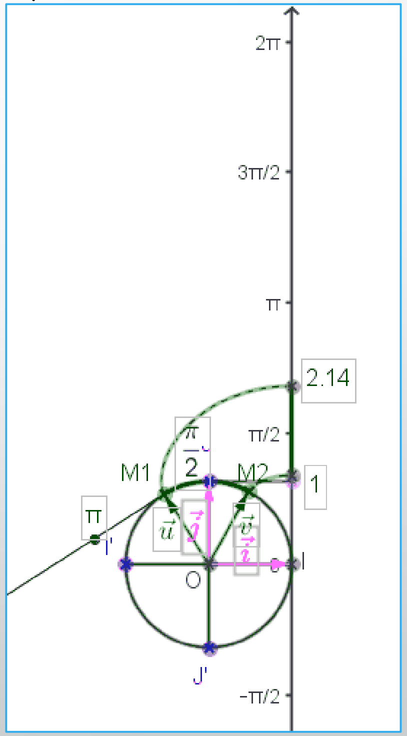
Voir enroulement.gif.

Mevel Christophe

B] Mesure d'un angle orienté et mesure principale

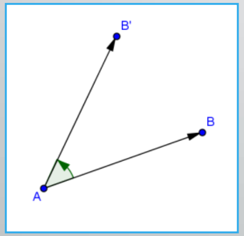
1°) Angle orienté de vecteurs de norme 1

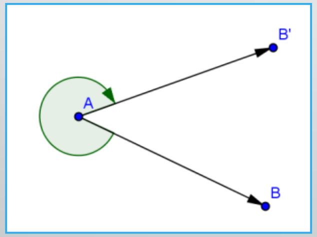
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de norme 1. Dans le plan orienté, muni d'un repère orthonormé (O;$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), on considère les points M_1 et M_2 tels que $\overrightarrow{OM_1} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OM_2} = \vec{v}$, le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et d la droite orientée tangente en I au cercle $\mathcal{C}$ munie du repère (I;$\vec{\jmath}$). Soit N_1 *et* N_2 deux points de la droite d qui, par enroulement de cette droite autour du cercle $\mathcal{C}$, se retrouvent respectivement en M_1 *et* M_2 . Dans le repère (I;$\vec{\jmath}$), notons n_1 *et* n_2 les abscisses respectives de N_1 *et* N_2.

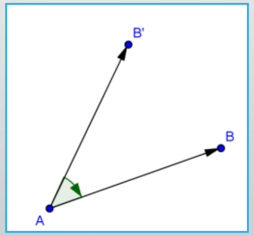


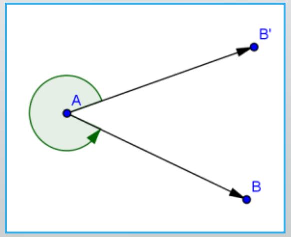
Définition:
Une mesure de l'angle orienté ($\vec{u}$,$\vec{v}$) est la différence $n_1 - n_2$.

Codage d'un angle orienté:









Mevel Christophe

Propriété:
Si α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$, les autres mesures de $(\vec{u}\,,\vec{v})$ ……………………………
…….

Démonstration:
Soit $N_1\ et\ N_1'$ deux points différents de la droite d qui se retrouvent après enroulement en M_1 ,
Et $N_2\ et\ N_2'$ deux points différents de la droite d qui se retrouvent après enroulement en M_2.
……………………… et ………………………… sont donc deux mesures de $(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.
Comparer ces deux mesures.
……….
……….
……….
………
……

2°) Angle orienté de vecteurs quelconques non nuls

Soit $\overrightarrow{u_1}\ et\ \overrightarrow{v_1}$ deux vecteurs non nuls. Les deux vecteurs $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|}\ et\ \vec{v}=\frac{\overrightarrow{v_1}}{\|\overrightarrow{v_1}\|}$.

Définition:
Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$ est égale à une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}\,)$.

Remarque:
La notion d'angle des deux vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ n'est définie que lorsque ces vecteurs sont…………………

3°) Mesure principal d'un angle orienté

Définition:
Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, celle qui se situe dans l'intervalle……………… est ………………………………………………………………..

Exemple: Trouvons la mesure principale de l'angle 17pi/3

4°) Relation de Chasles

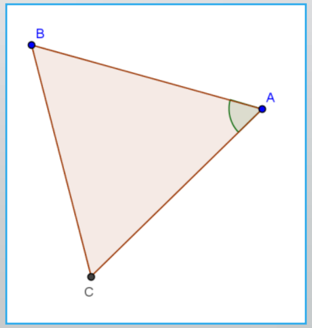
Propriété (admise):
Soit O, M, N et P quatre points du plan tels que O ≠ M, O ≠ N et O ≠ P.
On a la relation suivante:

$$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right) + \left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON}\right) = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) + 2k\pi$$

Où k est un entier relatif quelconque.
Cette relation est la **relation de Chasles**.

Exemple: Démontrer que la somme des angles dans un triangle vaut 180°.

5°) Angle orienté et angle géométrique

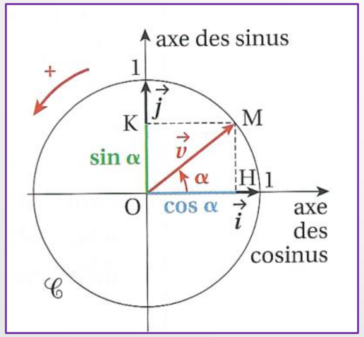


ABC triangle équilatéral.
L'angle géométrique codé ici est …………………
La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ vaut:………
La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$ vaut:……..

C] Cosinus et sinus d'un angle

1°) Cosinus et sinus d'un angle orienté

Le problème du début de séquence nous avait permis de découvrir
Les définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel que nous
rappelons ici à l'aide de la figure ci-dessous:



Le cosinus du nombre réel α est l'……………………… du point M.
Cette valeur se note ………………………
Le sinus du nombre réel α est l'……………………………. du point M.
Cette valeur se note ……………………………

Définitions:

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et α une mesure quelconque de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

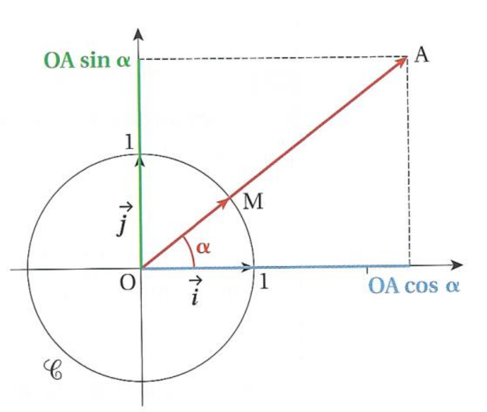
Le cosinus de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ est le cosinus d'une de ses mesures et se note …………………………………….

Le sinus de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ est le sinus d'une de ses mesures et se note ……………………………………...

Propriété:

Dans le repère $(O;\ \vec{i},\vec{j})$, A est un point distinct de O, tel qu'une mesure en radians de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{OA})$ soit égale à α.

Les coordonnées de A sont (……… …………….. ; ……… ……………….).



Démonstration: Voir exercice 44

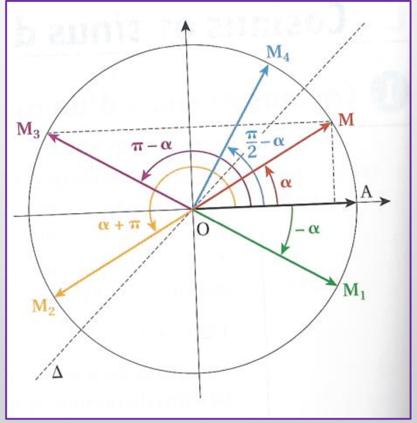
Mevel Christophe

Propriétés:
Pour tout nombre réel α, on a :
1) $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ **2)** $-1 \le \sin\alpha \le 1$ *et* $-1 \le \cos\alpha \le 1$

Démonstration:
1) ……
……….
2) ……

2°) Cosinus et sinus d'un angle associé

Soit α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. M_1, M_2, M_3 *et* M_4 sont les symétriques de M respectivement par rapport à l'axe des abscisses, l'origine, l'axe des ordonnées et la première bissectrice Δ.
Quelles sont les angles associés à l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$?
………………………………………………………………………………………….



Propriétés:
Pour tout nombre réel α, on a:

Démonstrations:
Elles reposent essentiellement sur la symétrie des angles par rapport aux axes des abscisses, des ordonnées, à l'origine, à la première bissectrice.