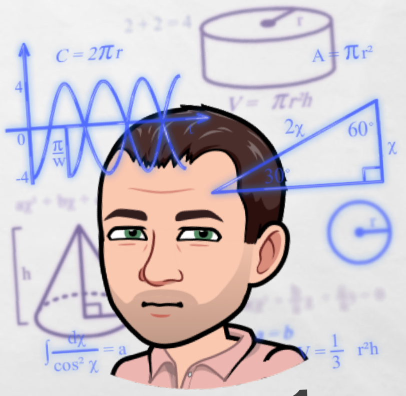
THÈME : STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

NOTRE DAME DU VOEU
LYCÉE

SÉQUENCE 12 : VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Je dois connaître	• Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles. • Loi d'une variable aléatoire. • Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire. • Succession de deux épreuves indépendantes. Arbre, tableau.
Je dois Savoir-faire	• Interpréter en situation et utiliser : $\{X = a\}, \{X \leq a\}, P(X = a)$ et $P(X \leq a)$. • Passer du registre de la langue naturelle au registre de symbolique et inversement. • Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire. • Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire. • Calculer une espérance, une variance et un écart type. • Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème. • Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes (arbre, tableau).



1

MEVEL CHRISTOPHE

1°) Variables aléatoires

Définition:
On appelle variable aléatoire sur un univers fini, une fonction qui, à tout événement élémentaire de l'univers, associe un nombre réel. On le note en général X.
Si une variable aléatoire X fait correspondre une valeur a à un événement A, on dit que a est une valeur de X.
On considère alors l'événement $\{X = a\}$

Exemple:

Soit un jeu consistant à effectuer deux tirages successifs d'une boule numérotée de 1 à 5 avec remise. Les boules sont indiscernables au touché. Le joueur gagne 15 € si la somme des chiffres est 2 ou 10, ne gagne rien si la somme est 6, perd 2 € si la somme est 3 ou 9 perd 1 € dans tous les autres cas.

Source: jaicompris.com

Soit X la variable aléatoire définit comme le gain en euros obtenu par le joueur.

Les valeurs prises par X traduisent le gain de 15 €, l'absence de gain et la perte de 1€, noté $X = \{15\,;0\,;-1\,;-2\}$
{X = 15} dans le jeu précédent correspond à l'événement **« le gain obtenu est exactement égal à 15 € ».**

- On note **{X < 0}** correspond à l'événement **« le gain obtenu est moins de 0 € ».**
- On note **{X ≤ -1}** correspond à l'événement **« le gain obtenu est au plus de -1€ ».**
- On note **{X > -2}** correspond à l'événement **« le gain obtenu est plus de -2€. »**
- On note **{X ≥ 0}** correspond à l'événement **« le gain obtenu est au moins de 0€ ».**

2°) Loi de probabilité

Définition:
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
Si $x_1, \dots, x_n$ désignent les valeurs prises par X, on note $X = x_i$ les issues pour lesquelles X prend la valeur x_i.
On note $P(X = x_i)$ la probabilité de cet événement.
La loi de probabilité de X représente l'ensemble des probabilités relatifs aux valeurs x_i sous forme de tableau.

Exemple:
La loi de probabilité de l'exemple page 2 est :

x_i	-2	-1	0	15
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$

+ =1

Propriété:
Dans le tableau qui donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire, la somme des probabilités est égaler à 1.
Autrement dit, si on note $x_1, \dots, x_n$ les valeurs prises par X, on a :

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1$$

2°) Espérance, variance et écart type

a) Définitions

Définition:
L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre réel $E(X)$:

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i$$

Remarques :

- L'espérance est la moyenne pondéré des valeurs prises X.
- On dit que le jeu est rentable si $E(X) > 0$.

Interprétation :

On interprète la valeur de $E(X)$ comme la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X si l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience.

Exemple:

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times \frac{4}{25} + (-1) \times \frac{14}{25} + 0 \times \frac{5}{25} + 15 \times \frac{2}{25} \\ &= -\frac{22}{25} + \frac{30}{25} \\ &= \frac{8}{25} \end{aligned}$$

On peut conclure que le jeu est rentable et que si l'on y joue un très grand nombre de fois, on peut espérer gagner 0,32 €.

Définitions :
La variance de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $V(X)$:

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + \ldots + p_n \times (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2$$

L'écart type, noté $\sigma(X)$, est le réel obtenu en exécutant le calcul: $\sqrt{V(X)}$.

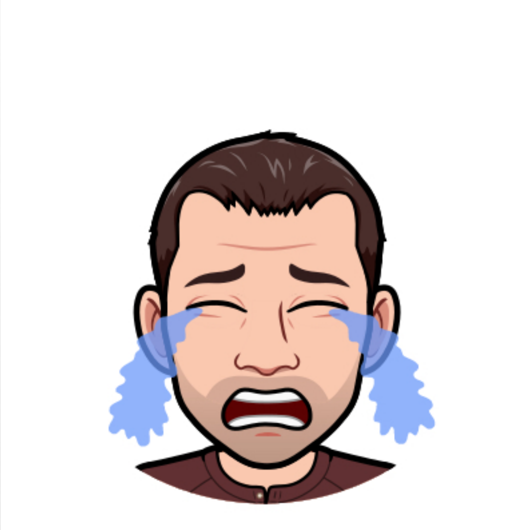
Interprétation :

On interprète la valeur de $V(X)$ comme la moyenne des carrés des écarts à l'espérance $E(X)$.
Elle mesure la dispersion des valeurs prise par la variable aléatoire X autour de son espérance $E(X)$.

Exemple:

$$V(X) = \frac{4}{25} \times (-2 - 0{,}32)^2 + \frac{14}{25} \times (-1 - 0{,}32)^2 + \frac{5}{25} \times (0 - 0{,}32)^2 + \frac{2}{25} \times (15 - 0{,}32)^2$$
$$= 19{,}0976$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{19{,}0976} \approx 4{,}37 \; arrondi\ à\ 10^{-2}\ près\ par\ défaut.$$



b) Linéarité de l'espérance

Définitions :
Soient a et b deux réels ; on pose $Y = aX + b$. Alors

- $E(Y) = aE(X) + b$
- $V(Y) = a^2 V(X)$

Conséquence: $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = |a|\sigma(X)$.