THÈME: GÉOMÉTRIE

SÉQUENCE 2:
LA GÉOMÉTRIE PLANE (PARTIE 1)

CAPACITÉS:

- UTILISER LE CRITÈRE DE COLINÉARITÉ COMME OUTIL DE DÉMONSTRATION EN GÉOMÉTRIE.
- CHOISIR UNE DÉCOMPOSITION PERTINENTE DANS LE CADRE DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES.

MEVEL CHRISTOPHE

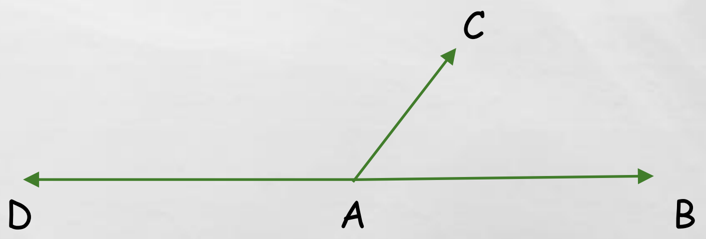
1°) Repères du plan

Définition:
Un repère du plan est défini par la donnée d'un point O, appelé origine du repère, et de deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ non colinéaires.
Il se note $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Autre notation: le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ peut aussi être noté (O,I,J) où I et J sont les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$.

Exemple :
Le tracé des vecteurs ci-contre nous permet de définir les repères:

- $(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
- $(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.



2°) Critère de colinéarité dans un repère

Propriété:
Dans un repère, on considère deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si xy' – x'y = 0.

Démonstration :

- Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors x = 0 et y = 0. Donc xy' – x'y = 0.
  - Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors x' = 0 et y' = 0. Donc xy' – x'y = 0.
  - Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

    Or, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$.

    Par conséquent, les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont égales à $\binom{kx}{ky}$.

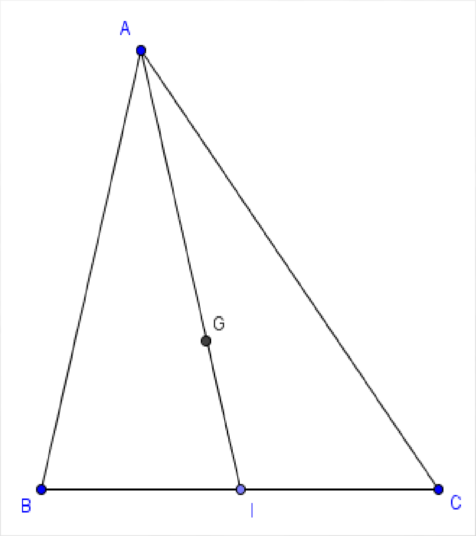
    On en déduit que, x' = kx et y' = ky.
    Ainsi, xy' – x'y = x(ky) – (kx)y = 0.

- Résiproquement, supposons que xy' – x'y = 0.
  - Si $x \neq 0$ alors $y' = \frac{x'y}{x}$ c'est-à-dire y' = k y où $k = \frac{x'}{x}$. Donc $\vec{v}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$ et $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
  - Si $y \neq 0$ alors $x' = \frac{xy'}{y}$ c'est-à-dire x' = kx où $k = \frac{y'}{y}$. Donc $\vec{v}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$ et $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
  - Si x = 0 ou y = 0 alors $\vec{u} = \vec{0}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3°) Expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires

Théorème admis:
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.
Il existe un unique couple de nombres réels (a ; b) tel que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

Exemple:
Dans un triangle ABC, I milieu du segment [BC].
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires donc tous vecteurs $\vec{u}$ peut s'exprimer en fonction de ces deux vecteurs.



Montrons que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

En effet, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = 2\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$

Or, I milieu de [BC] donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Ainsi, $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ d'où CDFD.

Carte mentale résumant l'ensemble de la séquence: