THÈME: GÉOMÉTRIE

NOTRE DAME DU VOEU
LYCÉE

SÉQUENCE 10 :
GÉOMÉTRIE REPÉRÉE PLANE AVEC UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Je dois connaître	• Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées (a, b) est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $(-b, a)$ en est un vecteur directeur. • Équation de cercle. • Parabole représentative d'une fonction polynôme du second degré. Axe de symétrie, sommet.
Je dois Savoir-faire	• Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite. • Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon. • Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon. • Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$. • Utiliser un repère pour étudier une configuration.

1

MEVEL CHRISTOPHE

1°) Critère de colinéarité dans un repère

Propriété:
Dans un repère orthonormé, on considère deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x \times y' - x' \times y = 0$.
Le calcul $xy' - x'y$ est appelé le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration :

- Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors x = 0 et y = 0. Donc xy' – x'y = 0.
  - Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors x' = 0 et y' = 0. Donc xy' – x'y = 0.
  - Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

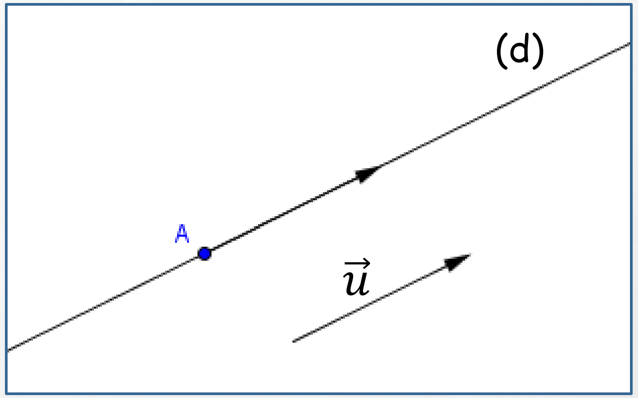
    Or, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$.

    Par conséquent, les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont égales à $\binom{kx}{ky}$.

    On en déduit que, x' = kx et y' = ky.
    Ainsi, xy' – x'y = x(ky) – (kx)y = 0.

- Réciproquement, supposons que xy' – x'y = 0.
  - Si $x \neq 0$ alors $y' = \frac{x'y}{x}$ c'est-à-dire y' = k y où $k = \frac{x'}{x}$. Donc $\vec{v}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$ et $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
  - Si $y \neq 0$ alors $x' = \frac{xy'}{y}$ c'est-à-dire x' = kx où $k = \frac{y'}{y}$. Donc $\vec{v}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$ et $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
  - Si x = 0 ou y = 0 alors $\vec{u} = \vec{0}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2°) Vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite



Définition:
Un vecteur directeur d'une droite (d) est un vecteur $\vec{u}$ non nul, dont la direction est celle de (d).

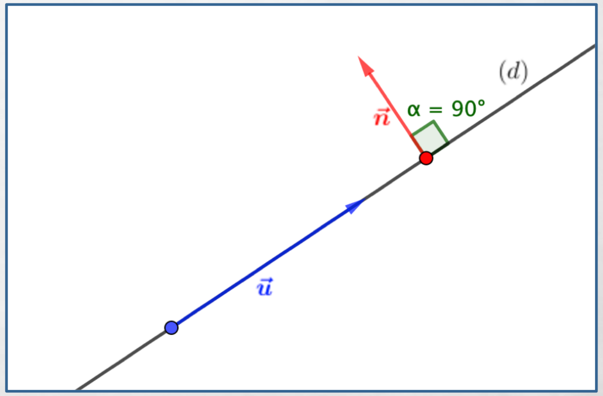
Conséquences :

- La donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul définit une droite (d) unique.
- Si A et B sont deux points distincts de (d), alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d).
- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d), alors k$\vec{u}$ $(k \neq 0)$ est aussi un vecteur directeur de (d).

Théorème (admis):
(d) et (d') sont deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$.
Dire que (d) et (d') sont parallèles équivaut à que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires.

3°) Vecteur normal $\vec{n}$ d'une droite

Définition:
Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul du plan.
$\vec{n}$ est un vecteur normal à d lorsque $\vec{n}.\vec{u} = 0$.



Propriétés:
Soit d une droite et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à d, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à d.
- Tout vecteur normal à d est orthogonal à tout vecteur directeur de d.

Propriété:
Soient d une droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Un point M appartient à d si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

4°) Equations cartésiennes d'une droite

4.1) Droite définie par un point et un vecteur directeur

Propriété:
Toute droite d a une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$.
Le vecteur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est alors un vecteur directeur de d.

Démonstration :
(d) est la droite passant par le point A$(x_0;y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.
Un point M$(x;y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0$, soit $\beta x-\alpha y-\beta x_0+\alpha y_0=0$.
Cette équation s'écrit $ax+by+c=0$, avec $a=\beta, b=-\alpha$ et $c=-\beta x_0+\alpha y_0$.
On a $(a;b)\neq(0;0)$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de (d).

Exemple: Soit la droite d d'équation 4x + 7y -12 = 0. Un vecteur directeur de cette droite d est $\binom{-7}{4}$.
Attention, $\binom{-14}{8}$ serait une réponse tout aussi acceptable. (Vecteurs égaux)

Définition:
Une équation d'une droite d de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ est appelée équation cartésienne de d.

4.2) Ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$

Propriété :

L' ensemble des points M$(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

Démonstration :

On note E l'ensemble des points M$(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$.

On cherche un point A$(x_0;y_0)$ de l'ensemble E.

- Si $b\neq 0$, on choisit x_0 quelconque et $y_0=-\frac{a}{b}x_0-\frac{c}{b}$;
- Si $b=0$, alors $a\neq 0$, on choisit y_0 quelconque et $x_0=-\frac{c}{a}$.

Dans les deux situations A$(x_0;y_0)$ est un point de E et $ax_0+by_0+c=0$.

Un point M$(x;y)$ appartient à E si et seulement si, $ax+by+c=0$, c'est-à-dire $ax+by+c=ax_0+by_0+c$, soit $a(x-x_0)-b(y-y_0)=0$ et cette dernière égalité équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}\binom{-b}{a}$ colinéaires.

Donc l'ensemble E est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

4.3) Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite

Propriété:
Une droite d a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ si et seulement si $\vec{n}\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à d.

Exemples:

1°) Soit la droite d d'équation cartésienne $3x + 4y + 12 = 0$. Un vecteur normal $\vec{n}$ a pour coordonnées $\binom{3}{4}$

2°) Soit la droite d' d'équation cartésienne $-5y + 7x + 12 = 0$. Un vecteur normal $\vec{n}$ a pour coordonnées $\binom{7}{-5}$

3°) Soit la droite d'' passant par le point $A(2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\binom{5}{3}$.
Déterminons une équation cartésienne à d''.

Soit $M(x\,;y)$ un point de la droite d''. On peut donc affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{n}$ sont orthogonaux
qui équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}\,.\vec{n} = 0$. (Voir propriété page 4)
qui équivaut à dire que $(x-2) \times 5 + (y-1) \times 3 = 0$ *pour tous les nombres réels x et y.*
(Voir calcul d'un produit scalaire avec les coordonnées séquence 5)
qui équivaut à dire que $5x + 3y - 13 = 0$ *pour tous les nombres réels x et y.*

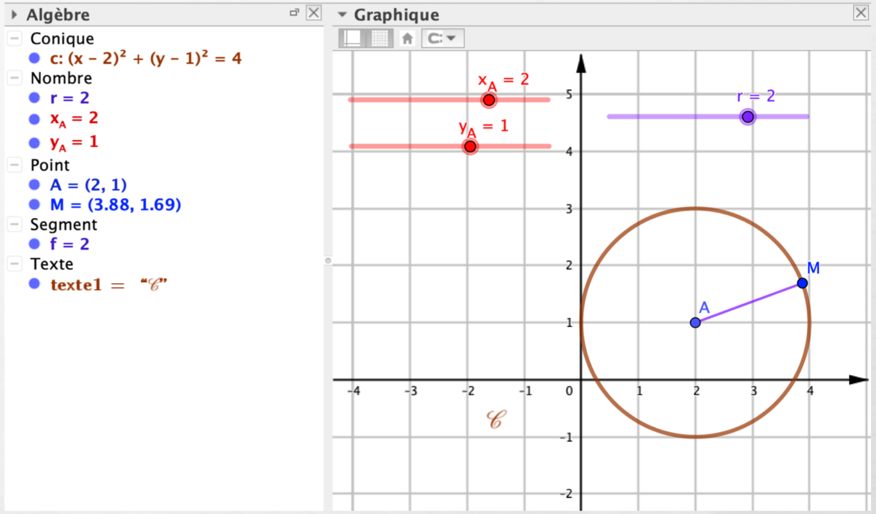
5°) Équation cartésienne d'un cercle et d'une parabole

5.1) Équation cartésienne d'un cercle

Propriété:
$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ de rayon r.
Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$.

Entrainement

Démonstration:
$M(x;y)$ est un point du cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $AM = r$
si et seulement si $AM^2 = r^2$
si et seulement si $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$



5.2) Équation cartésienne d'une parabole

Définition et propriété:
Soient a, b et c trois réels donnés tels que $a \neq 0$. Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie, pour tout réel x,
Par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
La courbe représentative de la fonction f, qui a pour équation $y = ax^2 + bx + c$, est une parabole.
Cette courbe admet:

- Pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.
- Pour sommet le point $S\left(-\frac{b}{2a}\,;\,f(-\frac{b}{2a})\right)$.