THÈME: GÉOMÉTRIE

NOTRE DAME DU VOEU

SÉQUENCE 12 : VECTEUR ET OPÉRATIONS

CAPACITÉS :

- CALCULER LES COORDONNÉES DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS DANS UN REPÈRE.
- UTILISER LA NOTATION $\lambda \vec{u}$
- ÉTABLIR LA COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS.
- DÉTERMINANT DE DEUX VECTEURS DANS UNE BASE ORTHONORMÉE.
- CARACTÉRISER ALIGNEMENT ET PARALLÉLISME PAR LA COLINÉARITÉ DE VECTEURS.

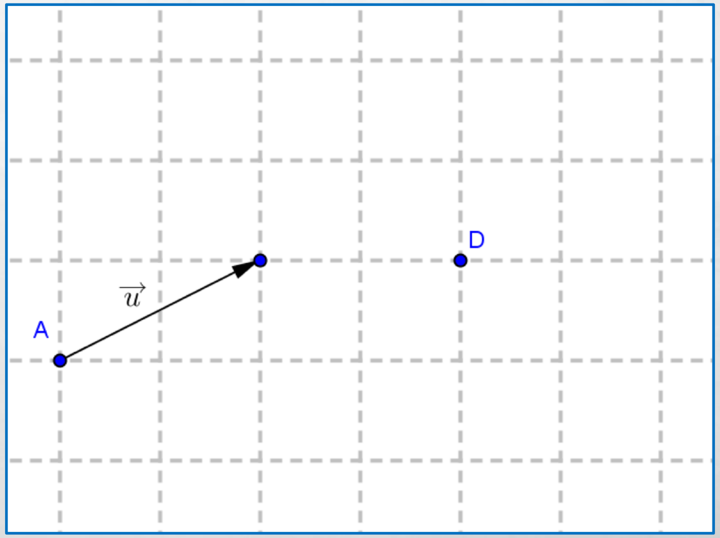
MEVEL CHRISTOPHE

1°) Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition:
Soit $k \in \mathbb{R}$.
Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel k est le vecteur associé à la translation résultant de *k fois* l'enchaînement successifs de la translation de vecteur $\vec{u}$. On le note $\mathrm{k}\vec{u}$.
Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par $-k$ est le vecteur noté $-k\vec{u}$. C'est le vecteur opposé de $k\vec{u}$.

Exemples:

- Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\vec{u}$
- Construire le point N tel que $\overrightarrow{DN} = -2\vec{u}$



Propriété:
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et k un nombre réel.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors : $\mathrm{k}\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple:
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM} = 3\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2°) Colinéarité

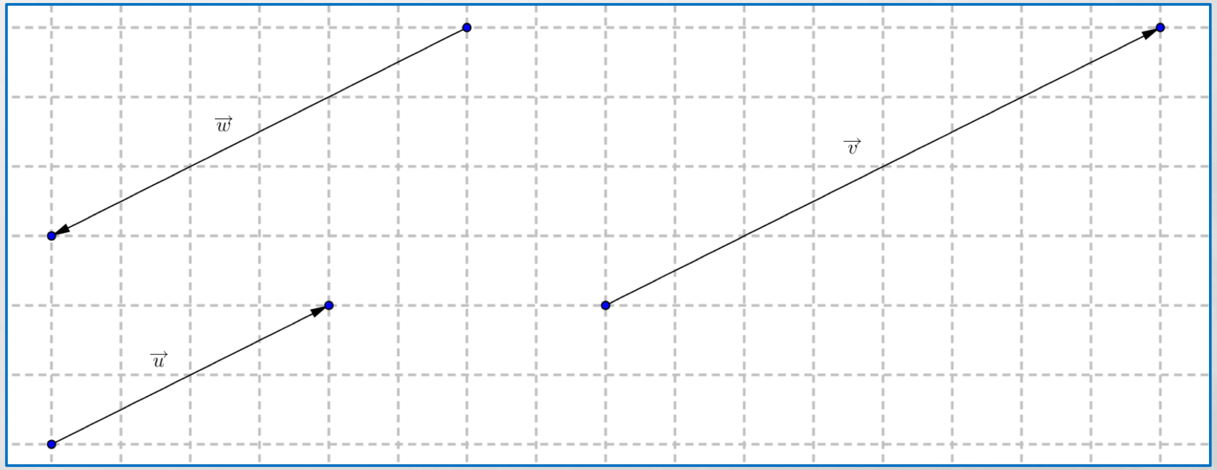
a) Vecteurs colinéaires

Définition:
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Propriété (Critère de colinéarité) :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemples:

- $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v} = 2\vec{u}$
- $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{w} = -1{,}5\vec{u}$



Définition :
On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, noté $\det(\vec{u},\vec{v})$, le nombre obtenu en appliquant la formule $x \times y' - y \times x'$.

Exemples:

1°) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$. $\det(\vec{u},\vec{v}) = x \times y' - y \times x = 4 \times 4 - 2 \times 8 = 0$

2°) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$. $\det(\vec{u},\vec{w}) = x \times y' - y \times x = 4 \times 3 - 2 \times (-6) = 24$

Propriété :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Exemples:

- L'exemple 1°) précédent nous permet d'affirmer que les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires.
- L'exemple 2°) précédent nous permet d'affirmer que les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

b) Application à la géométrie plane

Propriété:
Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corollaire:
Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Procédure:
Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires.

Exemple:
On donne A(−4;−1), B(−1;1), C(2;3).
$\overrightarrow{AB}\,\binom{3}{2}$ et $\overrightarrow{AC}\,\binom{6}{4}$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Par conséquent, les droites (AB) et (AC) sont parallèles. De plus, ces droites détiennent un point commun A donc ces trois points sont alignés.