Derivation_Newton_Dichotomie

June 25, 2020

1 TP : Dérivation et Méthode de Newton

Pour exécuter une saisie Python, sélectionner la cellule et valider avec SHIFT+Entrée.

2 1. Dérivation

But de l'activité : Ecrire des fonctions Python permettant le calcul de taux de variation, de nombres dérivés, du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine d'une tangente à une courbe.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 3$.

1. Ecrire une fonction Python f qui :

- reçoit en argument une valeur x ;
- renvoie son image par la fonction f.

[ ]:
```
# Ecrire la fonction
```

[ ]:
```
# Tester la fonction
```

2. Ecrire une fonction Python coeff_dir qui :

- reçoit en arguments les coordonnées de deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ (avec x_A x_B) ;
- renvoie le coefficient directeur de la droite (AB).

[ ]:
```
# Ecrire la fonction
```

[ ]:
```
# Tester la fonction
```

3. A l'aide de la fonction précédente, écrire une fonction Python taux_variation qui :

- reçoit en arguments une fonction f et deux valeurs a et h ;
- renvoie le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$.

[ ]:
```
# Ecrire la fonction
```

4. A l'aide de cette fonction, calculer le taux de variation de f entre 3 et $3,000001$. Conjecturer la valeur du nombre dérivé $f'(3)$, puis effectuer un calcul pour vérifier.

[ ]:
```
# Utiliser la fonction précédente
```

5. L'import « from scipy import misc » permet d'utiliser la fonction misc.derivative qui :

- reçoit en arguments une fonction f et une valeur a;
- renvoie le nombre dérivé de f en a.

Tester cette fonction pour calculer $f'(3)$.

[ ]:
```
from scipy import misc
ec=10**-9

misc.derivative(f,3,ec)
```

6. Ecrire une fonction Python coeff_tang qui :

- reçoit en arguments une fonction f et une valeur a ;
- renvoie le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la tangente à f en a.

Tester cette fonction pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en a.

[ ]:
```
# Ecrire la fonction
```

Tester cette fonction pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en 2.

[ ]:
```
# Tester la fonction précédente
```

7. La fonction tab_val ci-dessous permet d'obtenir une liste de valeurs de la fonction f.

- Quelle est la valeur initiale de cette liste ? le pas ? le nombre de valeurs obtenues ?
- Adapter cette fonction pour qu'elle reçoive en argument la valeur initiale x_0, le pas p et le nombre de valeurs n.

[ ]:
```
#(Tester puis) modifier la fonction
def tab_val(f):
    t=[]
    x=0
    for k in range(10):
        t.append(f(x))
        x=x+2
    return t
```

[ ]:
```
# Tester la fonction modifiée
```

8. Ecrire une fonction Python cdir_secantes qui :

- reçoit en arguments une fonction f, une valeur x_0, un pas p et un entier n.
- renvoie la liste des n coefficients directeurs des sécantes à la courbe de f à partir de x_0 avec un pas en abscisse p.

[ ]:
```
# Ecrire la fonction
```

3 2. Méthode de Newton

Prérequis : Fonctions Python réalisées dans l'activité « Fonctions élémentaires autour de la dérivation »

But de l'activité : Approcher la solution d'une équation à l'aide de la méthode de Newton.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 3$.

1. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$. On admettra pour la suite que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée .

2. Justifier que pour toute abscisse a, la tangente T_a à la courbe de f en a coupe l'axe des abscisses en un point P.

Déterminer l'expression de l'abscisse de P en fonction de a, $f'(a)$ et $f(a)$.

Ecrire une fonction Python etap_Newton qui :

- reçoit en argument une fonction f et une valeur a ;
- renvoie l'abscisse du point P correspondant.

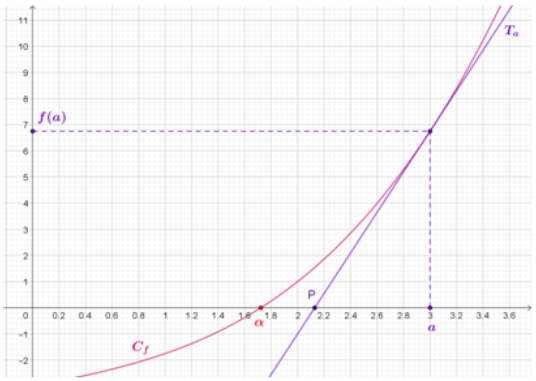


Figure pour la question 2

Figure pour la question 3

[ ]:
```
# Ecrire la fonction
```

[ ]:
```
# Tester la fonction
```

3. A partir d'un point de l'axe des abscisses, on peut donc construire une suite de points. On admettra ici que la suite des abscisses de ces points a pour limite .

La fonction Python appl_Newton donnée ci-dessous :

- reçoit en arguments une fonction f, une valeur a et un entier n;
- renvoie une liste de valeurs.

Expliquer ce que représentent les termes de la liste renvoyée.

[2]:
```
def appl_Newton(f,a,n):
    t=[a]
    for k in range(n):
        a=etap_Newton(f,a)
        t.append(a)
    return t
```

4. Tester cette fonction appl_Newton pour la fonction f de l'énoncé avec $a = 3$ et $n = 10$.

[ ]:
```
# Tester la fonction
```

5. Proposer et coder en Python des fonctions polynomiales g et h à coefficients entiers s'annulant respectivement en $\sqrt{5}$ et $\sqrt[3]{7}$.

[ ]:
```
# Ecrire les fonctions
```

A l'aide des fonctions Python précédentes, proposer des valeurs approchées de ces deux nombres.

[ ]:
```
# Effectuer les saisies nécessaires
```

4 3. Algorithme de Dichotomie

Prérequis : Aucun, mais les question 1)a)b) peuvent être supprimées si l'activité « Méthode de Newton » a été traitée.

But de l'activité : Approcher la solution d'une équation à l'aide d'un algorithme de dichotomie (méthode plus lente que la méthode de Newton, mais pour laquelle la précision du résultat est connue).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 3$.

1. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$. On admettra pour la suite que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée .

Ecrire une fonction Python f qui:

- reçoit en argument une valeur x ;
- renvoie son image par la fonction f.

[ ]:
```
#Ecrire la fonction
```

Déterminer les images de 0 et 3 par f, et en déduire que $[0;3]$.

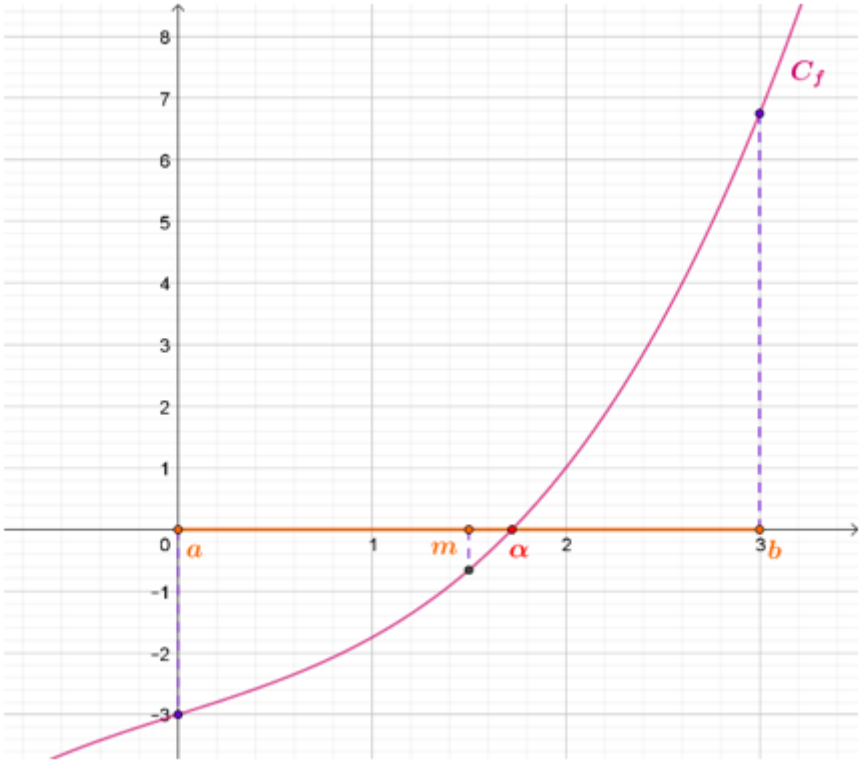
[ ]:
```
# Tester la fonction
```

2. On considère un intervalle $[a;b]$ contenant et on pose $m = \frac{a+b}{2}$.

Justifier que : (*) si $f(a) \times f(m) < 0$ alors $[a;m]$, et sinon $[m;b]$.

En utilisant (*), écrire une fonction Python etap_dichoto qui :

- reçoit en arguments une fonction f et les bornes a et b d'un intervalle contenant ;
- renvoie les bornes a et b d'un nouvel intervalle contenant .



[ ]:
```
# Ecrire la fonction
```

A partir de l'intervalle $[a;b] = [0;3]$, obtenir successivement 3 nouveaux intervalles contenant .

[ ]:
```
# Effectuer les saisies nécessaires
```

Que peut-on dire de la longueur de chaque intervalle obtenu par rapport à la précédente ?

3. Ecrire une fonction Python dichoto_iter qui :

- reçoit en arguments une fonction f, les bornes a et b d'un intervalle contenant et un entier n ;
- renvoie les bornes d'un nouvel intervalle contenant obtenu en répétant n fois la fonction précédente.

[ ]:
```
# Ecrire la fonction
```

Tester avec la fonction f de l'énoncé en partant de l'intervalle $[0;3]$ et en répétant 10 fois la méthode.

[ ]:
```
# Tester la fonction
```

4. Ecrire une fonction Python dichoto_test qui :

- reçoit en arguments la fonction f, les bornes a et b d'un intervalle contenant et une valeur h ;
- renvoie les bornes du premier intervalle de longueur inférieure à h obtenu avec la méthode décrite précédemment.

[ ]:
```
# Ecrire la fonction
```

Tester avec la fonction f de l'énoncé pour obtenir un encadrement de à 10^{-5} près.

[ ]:
```
# Tester la fonction
```

5. Proposer et coder en Python des fonctions polynomiales g et h à coefficients entiers s'annulant respectivement en $\sqrt{5}$ et $\sqrt[3]{7}$.

[ ]:
```
# Ecrire les fonctions
```

A l'aide des fonctions Python précédentes, proposer des encadrements de ces deux nombres à 10^{-7} près.

[ ]:
```
# Effectuer les saisies nécessaires
```