Dérivation : Point de vue global (source originale Chandora.P)

I Dérivation

1) Définition

On dit qu'une fonction f est dérivable sur I,lorsque pour tout réel x de I, le nombre dérivé de f en, x existe. Alors la fonction dérivée de f sur I est la fonction notée f' : x→f'(x).

Attention : l'ensemble de définition de f n'est pas toujours le même que l'ensemble de dérivabilité (ensemble de définition de f')

2) Dérivées des fonctions usuelles

Etudions la fonction dérivée de certaines fonctions de référence.

a) La fonction affine

On note f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = mx + p}$.

Calculons **le nombre dérivé de f en a** $\in \mathbb{R}$, c'est-à-dire calculons $\lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h)$

$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+p-ma-p}{h} = \frac{mh}{h} = m$ Donc $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} m = m$

Bilan :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, alors $f'(x) = .\, ...$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Remarque :

En effet, graphiquement, la tangente à la droite (d) représentative d'une fonction affine, est (d) elle-même. Ainsi, le coefficient directeur des tangente à (d), est le coefficient directeur de (d), c'est-à-dire m.

A présent,

Pour calculer le nombre dérivé de la fonction affine $f(x) = 3x - 5$, en $x = 1$, il suffit d'utiliser sa fonction dérivée à savoir ici $f'(x) = 3$ *et donc en* $x = 1$, *faire* … … … … … … … ..

b) La fonction carrée

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Calculons **le nombre dérivé de f en a** $\in$, c'est-à-dire calculons $\lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h)$

Nous obtenons alors pour le taux de variation :

$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$ … … … … … … … … .. Donc, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0}$ … … … … … . . =. . ..

Bilan :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, alors $f'(x) =$ …., quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

A présent,

Pour calculer le nombre dérivé de la fonction carrée, en $x = 3$, il suffit d'utiliser sa fonction dérivée à savoir ici, $f'(x) = 2x$ $et\ donc\ pour\ x = 3\ faire$ … … … … … … … … … … … … … … ..

c) La fonction inverse

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Calculons **le nombre dérivé de f en a** $\in \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire calculons $\lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h)$

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)\times a}}{h} = \frac{\frac{-h}{a^2+ah}}{h} = \frac{-h}{(a^2+ah)\times h} = \frac{-1}{a^2+ah}.$$ Donc, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{a^2+ah} = \frac{-1}{a^2}$

Bilan :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) =$ …. ,quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$.

A présent,

Pour calculer le nombre dérivé de la fonction inverse, en $x = 3$, il suffit d'utiliser sa fonction dérivée à savoir ici, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $et\ donc\ pour\ x = 3\ faire$ … … … … … … … … … … … … … . ..

d) La fonction racine carrée

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(x) =$ … … ,quel que soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

A présent,

Pour calculer le nombre dérivé de la fonction inverse, en $x = 3$, il suffit **d'utiliser sa fonction dérivée à savoir ici, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $et\ donc\ pour\ x = 3\ faire$** … … … … … … … … … … … … … … … … . ..

RESUME :

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = k \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$	$f'(x) = 0 \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$
$f(x) = x \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$	$f'(x) = 1 \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$
$f(x) = mx + p \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$	$f'(x) = m \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$
$f(x) = x^2 \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$	$f'(x) = 2x \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x} \quad définie\ sur\ \mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad définie\ sur\ \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x} \quad définie\ sur\ \mathbb{R}^+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad définie\ sur\ \mathbb{R}^{+*}$

Dans le cas général des fonctions de référence, avec $n \in \mathbb{N}$:

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = x^n \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1} \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$
$f(x) = \|x\| \quad définie\ sur\ \mathbb{R}$	$f'(x) = -1\ pour\ x\ \in]-\infty; 0[$ $f'(x) = 1\ pour\ x\ \epsilon\ ]0\ ;\ +\propto [$ $f' \quad définie\ sur\ \mathbb{R}^*$

Exemple : $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$; alors $f'(x) = 3x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

3) Opération et dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit k un réel.

Fonction f		Fonction dérivée f'	Fonction f définie sur	Fonction f' définie sur
Somme	$u + v$	$u' + v'$	**I**	**I**
Produit	$k \times u$	$k \times u'$	**I**	**I**
	$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$		
Inverse	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	**I, avec v ≠0**	**I, avec v ≠0**
Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$		
Racine carrée	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	**I, avec u ≥0**	**I, avec u >0**

Démonstration : *Dérivée de la fonction produit $u \times v$*

On calcule : $\tau_a(h) = \frac{(u\times v)(a+h)-(u\times v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$

$$= \frac{u(a+h) \times v(a+h)}{h} - \frac{v(a) \times u(a+h)}{h} + \frac{u(a+h) \times v(a)}{h} - \frac{u(a) \times v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)\times v(a+h)-v(a)\times u(a+h)}{h} + \frac{u(a+h)\times v(a)-u(a)\times v(a)}{h}$$

$$= \quad u(a+h) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + \quad v(a) \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

et $\lim\limits_{h\to 0} u(a+h) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h} + \quad v(a) \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u(a) \times v'(a) + v(a) \times u'(a)$

Ainsi, $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$

Exemples :

$1°)\ f(x) = x^2 + 3x$ $\quad f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots$

$2°)\ f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$3°)\ f(x) = 5x^2$ $\quad f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$4°)\ f(x) = \frac{-3}{x}$ $\quad f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$;

$5°)\ f(x) = -4x^3 + 8x - 9$ $\quad f'(x) = .\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$6°)\ f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 2$ $\quad f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$7°)\ f(x) = \frac{1}{5x^2 - 3x}$ $\quad f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$8°)\ f(x) = \frac{7x+3}{2x-1}$ $\quad f'(x) = .\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$9°)\ f(x) = \sqrt{4x - 7}$ $\quad f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Propriété :
On considère un intervalle I et a et b deux réels. Soit J l'intervalle formé des valeurs prises par $\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$ lorsque x décrit l'intervalle J.
Si la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par $f : x \mapsto g(\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b})$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $f'(x) = \boldsymbol{a} \times g'(\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b})$

Théorème :
Toute fonction f obtenue par somme, produit, ou quotient de fonctions dérivables,
est dérivable sur son domaine de définition D_f.

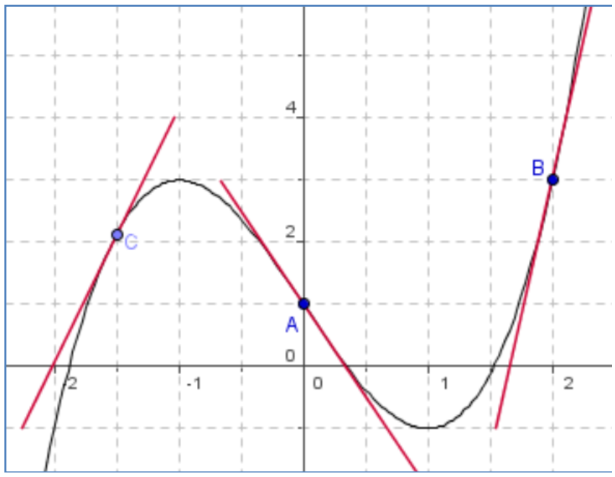
NB : Ce n'est pas vrai pour $\sqrt{u}$.

II Applications

1) Dérivée et sens de variation

On remarque qu'il y a un lien entre le signe du coefficient directeur des tangentes et les variations de la fonction f.

- Si la fonction est décroissante sur I, alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est négatif.
- Si la fonction est croissante sur I, alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est positif.



Théorème : f est une fonction dérivable sur un intervalle I, de fonction dérivée f'.

- Si f' ………………………………………………………………, sauf peut-être en quelques points où elle s'annule, alors f ………………………………………………………………………….
- Si f' ………………………………………………………………, sauf peut-être en quelques points où elle s'annule, alors f ………………………………………………………………………… .
- Si f' ………………………………………………, alors f ……………………………….

Exemples : 1) Etudier les variations de $f(x) = x^3$ 2) Etudier les variations de $f(x) = \frac{-x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2$

2) Dérivée et extrema locaux

En classe de seconde, on a défini le maximum d'une fonction f sur un intervalle I ainsi :

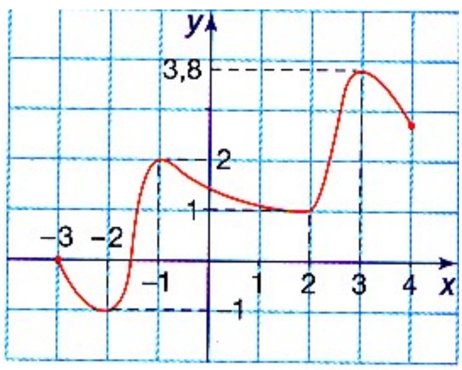
Pour $a \in I$, dire que f(a) est ……………………………………., signifie que pour tout x de I, ………………….

Par exemple, la fonction f représentée ci-contre a pour maximum 3,8 sur l'intervalle [-3 ;4] (car pour tout x de I, f(x) $\leq$ 3,8) et ce maximum est atteint lorsque x = 3 (car f(3) = 3,8).

Mais pour tout x de l'intervalle I' =]-2 ;0[, par exemple, f(x) $\leq$ 2.

Autrement dit, 2 est le maximum de f sur I'.

On dit alors que 2 est un **maximum local** de f en -1.



Théorème : Soit f une ***fonction dérivable*** sur ***un intervalle I*** et a un réel de I qui n'est pas une extrémité de I.

Si la dérivée ……………………………………………………………………………., alors $f(a)$ est un ………………………………………………

de f en a.

Illustration

Tableau de variation

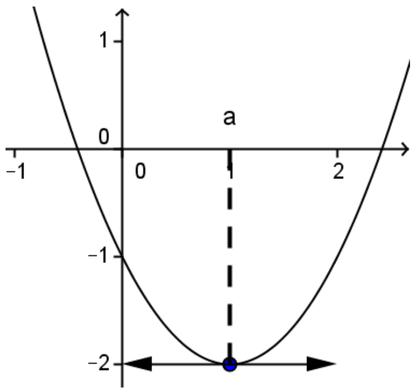
x		a	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$f(a)$	

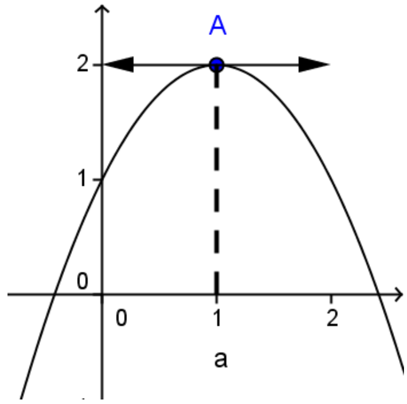
$f(a)$ est un minimum local

x		a	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f(a)$	

$f(a)$ est un maximum local

Représentation graphique



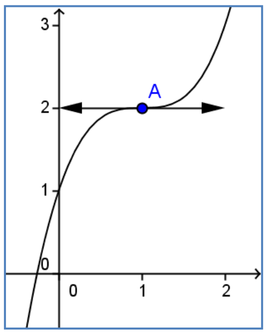


Remarque Si toutes les hypothèses ne sont pas vérifiées, ce théorème ne peut s'appliquer.

Exemple 1 :

f'(1)=0 et pourtant f(1) n'est pas un extremum.

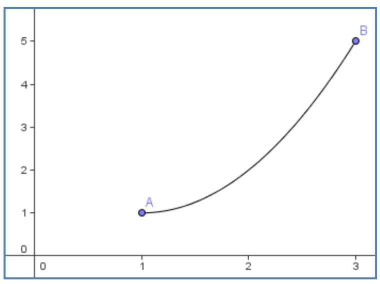
En effet, la dérivée s'annule mais ne change pas de signe.



Exemple 2 :

f(3) est un maximum, et pourtant f'(3)≠0.

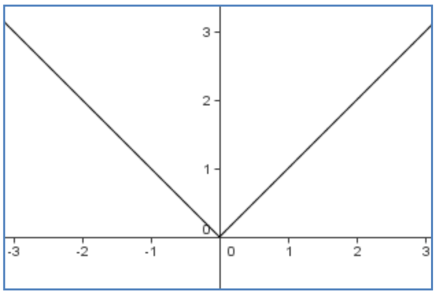
En effet, 3 est une extrémité de I=[1 ;3] .



Exemple 3: f(x)=IxI sur IR.

f(0) est un minimum, et pourtant f'(0)≠0.

En effet, f n'est pas dérivable en 0



Preuve :

• algébrique :

On calcule : $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$

Deux cas possibles :

Si $h > 0, \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$ et $\lim_{h \to 0} 1 = 1$

Si $h < 0, \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$ et $\lim_{h \to 0} -1 = -1$

(On rappelle que $h \neq 0$)

Ainsi, f n'a pas de nombre dérivé en 0, suivant qu'on « s'approche par la droite » ($h > 0$), ou « qu'on s'approche par la gauche » ($h < 0$) de 0.

• graphique :

Il n'y a pas de tangente à la courbe au point d'abscisse 0, suivant qu'on s'approche de 0 par la droite ou par la gauche.