Exercices du jeudi 19 mars 2020

Maths Spécialité Première

MATHÉMATIQUES

NOTRE DAME DU VOEU
LYCÉE

ERREUR: MODIFICATION PAGE 8 DU COURS

Propriété: (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

Pour $u_0 > 0$:
- Si q > 1 alors la suite (u_n) est croissante.
- Si 0 < q < 1 alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour $u_0 < 0$:
- Si q > 1 alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si 0 < q < 1 alors la suite (u_n) est croissante.

Exercice 68 page 158

1°) La suite $(\mathrm{u_n})$ est suite géométrique de raison 0.2 et de premier terme $\mathrm{u_0} = 4$.

0 < q < 1 et $u_0 > 0$ donc la suite est décroissante.

2°) La suite $(\mathrm{v_n})$ est suite géométrique de raison 4 et de premier terme $\mathrm{v_0} = -3$.

q > 1 et $v_0 < 0$ donc la suite est décroissante.

3°) La suite $(\mathrm{w_n})$ est suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $\mathrm{w_0} = -2$.

0 < q < 1 et $w_0 < 0$ donc la suite est croissante.

4°) $$t_n = \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3^n \times 3} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

La suite $(\mathrm{t_n})$ est suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\mathrm{t_0} = \frac{2}{3}$.

0 < q < 1 et $t_0 > 0$ donc la suite est décroissante.

5°)
$$k_n = \frac{(-2)^n}{10} = \frac{1}{10} \times (-2)^n$$

La suite $(\mathrm{k_n})$ est suite géométrique de raison -2 et de premier terme $k = \frac{1}{10}$.

On ne peut pas conclure avec la propriété utilisée précédemment car **q < 0**.

D’ailleurs cela conduit à conclure que la suite n’est pas monotone.

(Elle est ni croissante ni décroissante)

6°) La suite $(\mathrm{z_n})$ est suite géométrique de raison 3 et de premier terme $\mathrm{z_0} = 5$.

q > 1 et $z_0 > 0$ donc la suite est croissante.

68 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 4 \times 0{,}5^{n+1} - 4 \times 0{,}5^n \\ &= 4 \times 0{,}5^n (0{,}5 - 1) \\ &= -2 \times 0{,}5^n \end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$, soit $u_{n+1} < u_n$.
La suite est donc décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -3 \times 4^{n+1} - (-3) \times 4^n \\ &= -3 \times 4^n (4 - 1) \\ &= -9 \times 4^n \end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} - v_n < 0$, soit $v_{n+1} < v_n$.
La suite est donc décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= -2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - (-2) \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \\ &= -2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{1}{5} - 1\right) \\ &= \frac{8}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \end{aligned}$$

Ainsi $w_{n+1} - w_n > 0$, soit $w_{n+1} > w_n$.
La suite est donc croissante.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{2 \times 3}{3^{n+2}} \\ &= \frac{-4}{3^{n+2}} \end{aligned}$$

Ainsi $t_{n+1} - t_n < 0$, soit $t_{n+1} < t_n$.
La suite est donc décroissante.

5. La suite (k_n) est géométrique de terme initial $k_0 = \frac{1}{10}$ et de raison $q = -2$.
Or $q < 0$ donc la suite n'est donc pas monotone.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 5 \times 3^n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= 5 \times 3^{n+1} - 5 \times 3^n \\ &= 5 \times 3^n (3 - 1) \\ &= 10 \times 3^n \end{aligned}$$

Ainsi $z_{n+1} - z_n > 0$, soit $z_{n+1} > z_n$.
La suite est donc croissante.

Exercice 117 page 164

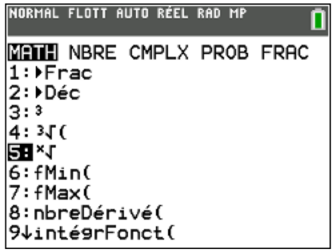
1°) $u_{10} = u_3 \times q^{10-3}$

$312\,500 = 4 \times q^7$

$q^7 = \dfrac{312\,500}{4}$

$q^7 = 78\,125$

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$



$q = 5$

$u_3 = u_0 \times q^{3-0}$

$4 = u_0 \times 5^3$

$u_0 = \dfrac{4}{5^3}$

$u_0 = 0,032$

2. • $u_7 = u_2 \times q^{7-2} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2187} = \dfrac{5}{9} \times q^5$

$\Leftrightarrow q^5 = -\dfrac{5}{2187} \times \dfrac{9}{5} \Leftrightarrow q^5 = -\dfrac{1}{243} \Leftrightarrow q = -\dfrac{1}{3}$

• $u_2 = u_0 \times q^2 \Leftrightarrow \dfrac{5}{9} = u_0 \times \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow u_0 = 5$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

3. • $u_6 = u_2 \times q^{6-2} \Leftrightarrow 32 = 2 \times q^4$

$\Leftrightarrow q^4 = 16 \Leftrightarrow q = 2$ ou $q = -2$. Ici $q > 0$ donc $q = 2$.

• $u_2 = u_0 \times q^2 \Leftrightarrow 2 = u_0 \times 4 \Leftrightarrow u_0 = 2$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.

4. • $u_{10} = u_4 \times q^{10-4} \Leftrightarrow \dfrac{15}{512} = \dfrac{15}{8} \times q^6$

$\Leftrightarrow q^6 = \dfrac{8}{512} \Leftrightarrow q^6 = \dfrac{1}{64} \Leftrightarrow q = \dfrac{1}{2}$ ou $q = -\dfrac{1}{2}$.

Ici $q < 0$ donc $q = -\dfrac{1}{2}$.

• $u_4 = u_0 \times q^4 \Leftrightarrow \dfrac{15}{8} = u_0 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow u_0 = \dfrac{15}{8} \times 16 \Leftrightarrow u_0 = 30.$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 30 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 118 page 164

$1a)$ La suite $(\mathrm{u_n})$ est suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $\mathrm{u_0} = 1.$

q > 1 et $u_0 > 0$ donc la suite est croissante.

$1b)$ La suite $(\mathrm{u_n})$ est suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $\mathrm{u_0} = -3.$

q > 1 et $u_0 < 0$ donc la suite est décroissante.

$1c)$ La suite $(\mathrm{u_n})$ est suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $\mathrm{u_0} = 20.$

0 < q < 1 et $u_0 > 0$ donc la suite est décroissante.

$1d)$ La suite $(\mathrm{u_n})$ est suite géométrique de raison $-$ 0,8 et de premier terme $u = -10.$

q < 0 donc la suite n'est pas monotone.

$1e)$ La suite $(\mathrm{u_n})$ est suite géométrique de raison $-$ 1,2 et de premier terme $\mathrm{u_0} = 10.$

q < 0 donc la suite n'est pas monotone.

$1b)$ La suite $(\mathrm{u_n})$ est suite géométrique de raison 1 et de premier terme $\mathrm{u_0} = -20.$

q = 1 donc la suite est constante.

2. • La suite du **1. a.** est croissante et a pour terme initial $u_0 = 1$. Elle est donc représentée par le nuage de points roses.

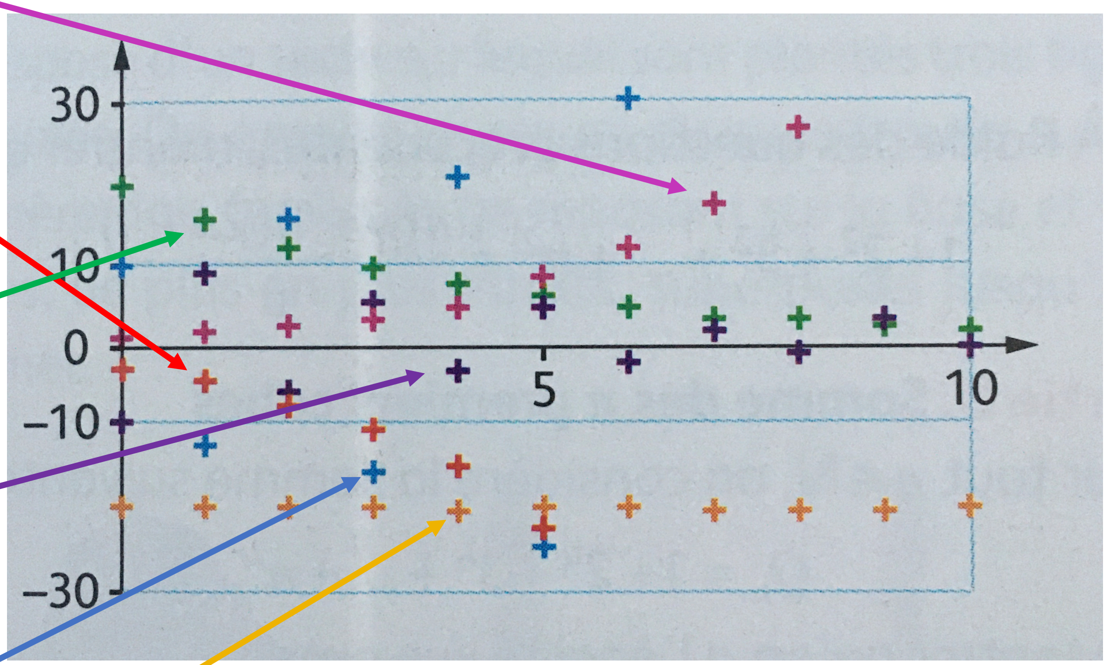
• La suite du **1. b.** est décroissante et a pour terme initial $u_0 = -3$. Elle est donc représentée par le nuage de points rouges.

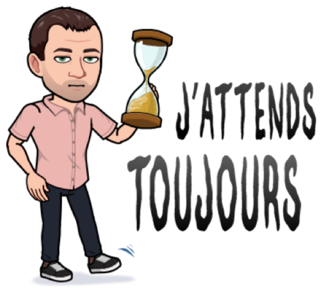
• La suite du **1. c.** est décroissante et a pour terme initial $u_0 = 20$. Elle est donc représentée par le nuage de points verts.

• La suite du **1. d.** n'est pas monotone et a pour terme initial $u_0 = -10$. Elle est donc représentée par le nuage de points violets.

• La suite du **1. e.** n'est pas monotone et a pour terme initial $u_0 = 10$. Elle est donc représentée par le nuage de points bleus.

• La suite du **1. f.** est constante et a pour terme initial $u_0 = -20$. Elle est donc représentée par le nuage de points oranges.





Et les limites alors ?

3. Pour aller plus loin

- Si le terme initial est positif et $q > 1$: la suite diverge vers $+\infty$: voir la suite du **1. a.**
- Si le terme initial est négatif et $q > 1$: la suite diverge vers $-\infty$: voir la suite du **1. b.**
- Si le terme initial est positif ou négatif et $-1 < q < 1$: la suite converge vers 0 : voir les suites du **1. c.** et **1. d.**
- Si le terme initial est positif ou négatif et $q \leqslant -1$: la suite n'a pas de limite : voir la suite du **1. e.**
- Si le terme initial est positif ou négatif et $q = 1$: la suite est constante et converge vers ce nombre : voir la suite du **1. f.**