Exercices sur la continuité, le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire

Exercice 1 :
Montrer que l'équation $e^x + x = 0$ admet **une unique** solution réelle.

Exercice 2 :
Démontrer que l'équation $e^{2x+1} = x + 5$ admet **au moins** une solution dans $\mathbb{R}$.

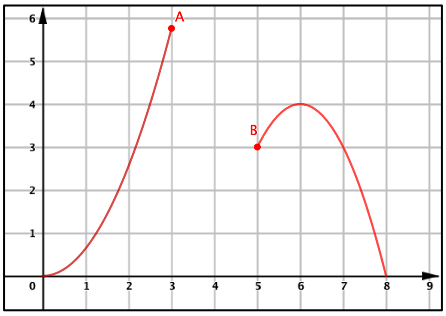
Exercice 3 :
L'équation $e^x = x + 3$ admet-elle des solutions réelles ? Si oui, combien ? Justifier la réponse.

Exercice 4 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & si\ x \geq 2 \\ e^{x-2} - 4 & si\ x < 2 \end{cases}$$

a) Expliquer pourquoi la fonction f est continue sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ puis sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.
b) Déterminer les limites à gauche et à droite de f en 2. Qu'en déduire pour la fonction f ?
c) Conclure pour la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :
Un designer a dessiné une partie d'un logo dans le repère ci-contre :



Ce logo est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}64x^2 & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ ax + b & si\ 3 < x < 5 \\ 4 - (x-6)^2 & si\ 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

a) Déterminer les nombres réels a et b afin que la fonction f soit continue sur l'intervalle $[0\,;8]$.

b) Déterminer le nombre dérivé en 3 de la fonction polynôme $x \mapsto 0{,}64x^2$, puis de la fonction affine $x \mapsto -1{,}38x + 9{,}9$. La fonction f est-elle dérivable en 3 ?

c) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 5.