Applications de la dérivation

Exercice 1

Une étude de l'INSEE a listé l'évolution en France des salaires nets annuels moyens de 1990 à 2010

En se servant des données de cette étude, on modélise l'évolution des salaires nets annuels moyens jusqu'en 2020 :

- Pour les hommes par la fonction h définie sur $[0\,;30]$ par :
  $h(x) = 0{,}25{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x^2 + 318{\cdot}x + 17\,865$
- Pour les femmes par la fonction f définie sur $[0\,;30]$ par :
  $f(x) = 0{,}6{\cdot}x^3 - 13{\cdot}x^2 + 470{\cdot}x + 13\,324$

Ainsi, $h(0)$ désigne le salaire net annuel des hommes en 1990, $f(1)$ désigne le salaire net annuel des femmes en 1991, etc...

1. Calculer $h(15)$ et $f(15)$ puis interpréter les résultats.
2. Calculer l'écart des salaires nets annuels moyens prévus par ce modèle entre les hommmes et les femmes en 2020.
3. Montrer que l'écart entre ces deux salaires peut être modélisé par la fonction g définie sur $[0\,;30]$ par :
   $g(x) = -0{,}35{\cdot}x^3 + 15{\cdot}x^2 - 152{\cdot}x + 4\,541$
4. On note g' la dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.
5. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $[0\,;30]$.
6. Peut-on affirmer que l'écart entre les salaires nets annuels moyens des hommes et des femmes n'a fait que diminuer depuis 1990?

Exercice 2

Une entreprise fabrique des croquettes pour chiens. Chaque jour, elle en fabrique entre 0 et 80 tonnes. Le coût de fabrication, en euros, de x tonnes est modélisé par la fonction C définie par :

$C(x) = x^3 - 105{\cdot}x^2 + 3700{\cdot}x + 4000$

Une tonne de croquettes est vendue 1 900 €. La recette, pour x tonnes vendues, est donc donnée par une fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;80]$.

1. a. Pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;80]$, donner l'expression de $R(x)$.
   b. En déduire que le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de croquettes est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;80]$ par :
   $B(x) = -x^3 + 105{\cdot}x^2 - 1800{\cdot}x - 4000$
2. Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
3. Justifier que le signe de $B'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	0		10		60		80
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

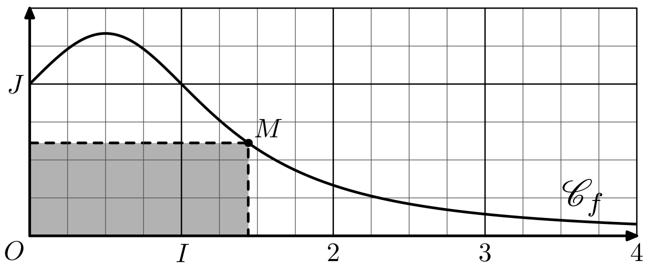
4. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;80]$.
5. Quelle doit être la quantité de croquettes que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal?
   Que vaut ce bénéfice?

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et le rectangle représenté ci-dessus où :

- les points O et M en sont deux sommets opposés.
- ses côtés sont parallèles aux axes du repère.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x.

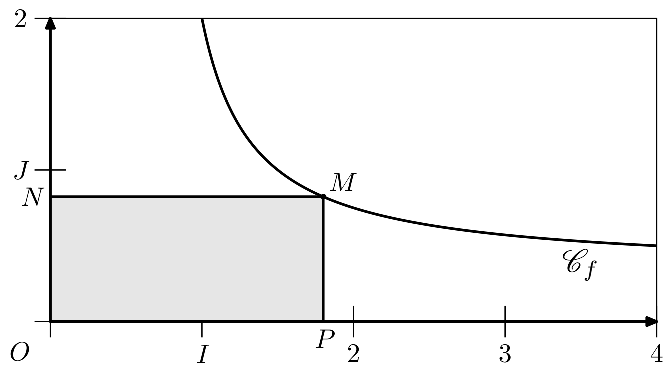
1. Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.
2. a. Montrer que la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$ admet pour expression :
   $$\mathcal{A}'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$$
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction $\mathcal{A}'$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.
3. Justifier que l'aire du rectangle est maximale lorsque le point M a pour abscisse 1.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$ par la relation :

$f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$

La représenation $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où x est l'abscisse du point M. Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

1. Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $\mathcal{A}$.

3. Etablir le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.

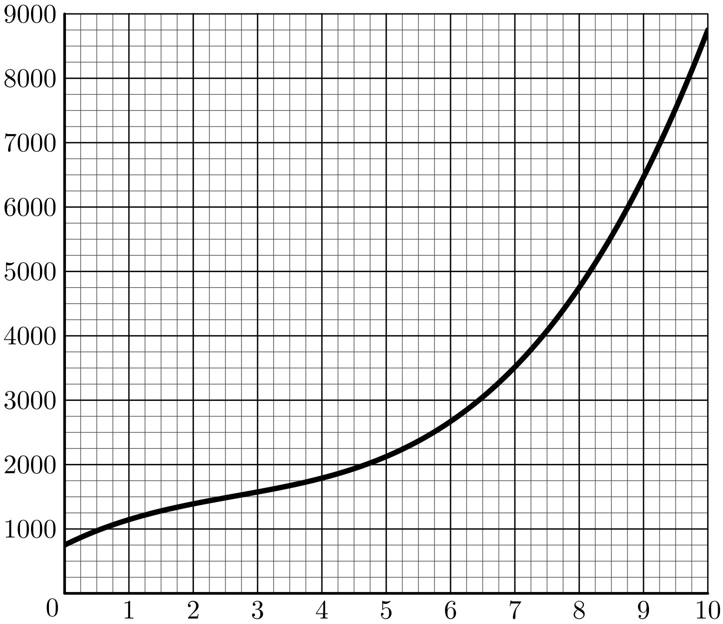
4. En déduire la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.

Exercice 5

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :
$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$.

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C.



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Etude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = p \cdot x$.

1. Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation :
$y = 400 \cdot x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

   a. Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation :
   $y = 680 \cdot x$.
   Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

   b. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;10[$ par :
   $B(x) = 680 \cdot x - C(x)$
   Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;10]$, on a :
   $B'(x) = -45 \cdot x^2 + 240 \cdot x + 180$

   c. Etudier les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.
   En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum.
   Donner la valeur de ce bénéficec.

Partie B : étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, on a :
$$C'_M(x) = \frac{30 \cdot (x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$$

2. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
   En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
   Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?