Problèmes sur le troisième degré

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-2\,;4\right]$ par l'expression :

$f(x) = -5{\cdot}x^3 - 6{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x + 2$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. a. Résoudre l'équation $-15{\cdot}x^2 - 12{\cdot}x + 3 = 0$

   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f' sur l'intervalle $\left[-2\,;4\right]$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-2\,;4\right]$.

Exercice 2

Une étude de l'INSEE a listé l'évolution en France des salaires nets annuels moyens de 1990 à 2010

En se servant des données de cette étude, on modélise l'évolution des salaires nets annuels moyens jusqu'en 2020 :

- Pour les hommes par la fonction h définie sur $\left[0\,;30\right]$ par :
  $h(x) = 0{,}25{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x^2 + 318{\cdot}x + 17\,865$
- Pour les femmes par la fonction f définie sur $\left[0\,;30\right]$ par :
  $f(x) = 0{,}6{\cdot}x^3 - 13{\cdot}x^2 + 470{\cdot}x + 13\,324$

Ainsi, $h(0)$ désigne le salaire net annuel des hommes en 1990, $f(1)$ désigne le salaire net annuel des femmes en 1991, etc. . .

1. Calculer $h(15)$ et $f(15)$ puis interpréter les résultats.

2. Calculer l'écart des salaires nets annuels moyens prévus par ce modèle entre les hommmes et les femmes en 2020.

3. Montrer que l'écart entre ces deux salaires peut être modélisé par la fonction g définie sur $\left[0\,;30\right]$ par :
   $g(x) = -0{,}35{\cdot}x^3 + 15{\cdot}x^2 - 152{\cdot}x + 4\,541$

4. On note g' la dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.

5. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $\left[0\,;30\right]$.

6. Peut-on affirmer que l'écart entre les salaires nets annuels moyens des hommes et des femmes n'a fait que diminuer depuis 1990?

Exercice 3

Une entreprise fabrique des croquettes pour chiens. Chaque jour, elle en fabrique entre 0 et 80 tonnes. Le coût de fabrication, en euros, de x tonnes est modélisé par la fonction C définie par :

$C(x) = x^3 - 105{\cdot}x^2 + 3700{\cdot}x + 4000$

Une tonne de croquettes est vendue 1 900 €. La recette, pour x tonnes vendues, est donc donnée par une fonction R définie sur l'intervalle $\left[0\,;80\right]$.

1. a. Pour x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;80\right]$, donner l'expression de $R(x)$.

   b. En déduire que le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de croquettes est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $\left[0\,;80\right]$ par :
   $B(x) = -x^3 + 105{\cdot}x^2 - 1800{\cdot}x - 4000$

2. Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.

3. Justifier que le signe de $B'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	0		10		60		80
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $\left[0\,;80\right]$.

5. Quelle doit être la quantité de croquettes que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal?
   Que vaut ce bénéfice?

ex 1 7804 ex 2 7772 ex 3 7825